

УДК 378.14:371.214.46: [004.78:51]

DOI <https://doi.org/10.32782/cusu-pmtp-2025-1-3>

ІНТЕГРАТИВНІ ПІДХОДИ ДО ВИВЧЕННЯ РЯДІВ У МЕЖАХ НАСТУПНІСНИХ ЛІНІЙ ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ

Ботузова Юлія Володимирівна,

доктор педагогічних наук, доцент,

доцент кафедри математики та цифрових технологій

Центральноукраїнського державного університету імені Володимира Винниченка

ORCID ID: 0000-0002-1313-0010

Корольський Володимир Вікторович,

кандидат технічних наук, професор,

професор кафедри математики та методики її навчання

Криворізького державного педагогічного університету

ORCID ID: 0000-0002-7409-4201

Статтю присвячено проблемам наступності в навчанні математики, зокрема особливостям вивчення теми «Числові послідовності» шкільного курсу математики в нерозривному зв'язку з вивченням рядів у ЗВО. Обґрунтовано значущість інтегративного підходу, який сприяє комплексному засвоєнню знань та розвитку математичних компетентностей учнів і студентів. Проведено аналіз методичних особливостей формування понять «арифметична прогресія», «члени арифметичної прогресії», «сума n перших членів арифметичної прогресії» з використанням геометричного моделювання, що дає змогу не лише візуалізувати математичні поняття, а й спростити розуміння абстрактних ідей. У статті розглянуто методи доповнювання та укрупнення дидактичних одиниць, що сприяють забезпеченню зв'язків між ланками освіти.

Автори зазначають, що відсутність чіткої взаємодії між поняттями «числова послідовність» і «функція» в шкільному курсі математики створює певні труднощі у вивченні математичного аналізу у вищій школі. Запропоновано використання графічного підходу для дослідження арифметичних та геометричних рядів, що дає змогу аналізувати їхні закономірності й умови збіжності. У процесі дослідження проаналізовано числові ряди в контексті математичних курсів різних рівнів, а також порівняно підходи до викладання цієї теми у вітчизняних та зарубіжних навчальних програмах.

Під час дослідження виокремлено основні труднощі у вивченні числових послідовностей та запропоновано методичні рекомендації щодо їх подолання. Використання геометричних моделей сприяє формуванню дослідницьких навичок та забезпечує практичну спрямованість навчального процесу. Запропоновані підходи можуть бути використані для вдосконалення навчальних програм і методичних рекомендацій, що забезпечить більш ефективне засвоєння числових послідовностей у контексті наступності математичної освіти.

Ключові слова: інтеграція, наступність, методика навчання математики, ряди, шкільний курс математики.

Botuzova Yuliia, Korolskyy Volodymyr. Integrative approaches to the study of the series within the lines of continuity in the school course of mathematics

The article is devoted to the problems of continuity in the teaching of mathematics, in particular, to the peculiarities of studying the topic «Numerical sequences» of the school course of mathematics in an inseparable connection with the study of series in higher education. The significance of the integrative approach, which contributes to the integrated assimilation of knowledge and the development of mathematical competencies of students and students, has been substantiated. An analysis of the methodological features of the formation of the concepts of “arithmetic progression”, “members of arithmetic progression”, “sum of n first members of arithmetic progression” with the use of geometric modeling, which allows not only to visualize mathematical concepts, but also to simplify the understanding of abstract ideas. The article considers methods of supplementing and enlarging didactic units that contribute to ensuring connections between the links of education. The authors note that the lack of a clear interaction between the concepts of “numerical sequence” and “function” in the school course of mathematics creates certain

difficulties in the study of mathematical analysis in high school. The use of a graphical approach for the study of arithmetic and geometric series has been proposed, which makes it possible to analyze their regularities and convergence conditions. In the course of the study, numerical series were analyzed in the context of mathematical courses at different levels, and approaches to teaching this topic in domestic and foreign curricula were compared. During the study, the main difficulties in the study of numerical sequences were identified and methodological recommendations for overcoming them were proposed. The use of geometric models contributes to the formation of research skills and provides a practical orientation of the educational process. The proposed approaches can be used to improve curricula and methodological recommendations, which will ensure a more effective assimilation of numerical sequences in the context of the continuity of mathematical education.

Key words: integration, continuity, methods of teaching mathematics, series, school course of mathematics.

Вступ. Розробка та впровадження в освітній процес наступнісних зв'язків між школою та ЗВО, зокрема, під час вивчення математики, завжди належали до кола пріоритетних педагогічних проблем. Наразі актуальність цього напрямку досліджень зростає з огляду на динамічні зміни в обох ланках освіти.

Застосування принципу наступності спрямовується на забезпечення зв'язків усередині та між рівнями освіти для продовження розвитку компетентностей, сформованих у здобувачів освіти на попередніх ланках. При цьому передбачається реалізація внутрішньої інтеграції методів, засобів, компонентів та змістових ліній самої математики як навчальної дисципліни в школі та ЗВО, а також комплексне впровадження системи інших дидактичних принципів, зокрема систематичності, послідовності та перспективності.

Досліджуючи проблему наступності між шкільним курсом математики та її вивченням у закладах вищої освіти, М. Босовський [1] виокремив два основні напрями її реалізації. Перший з них пов'язаний з опорою нового змісту на вже засвоєний зміст на попередньому етапі навчання, і тоді встановлюється зв'язок матеріалу, що вивчається у ЗВО, з матеріалом, який вивчався в школі. Тож для першого напрямку доцільне спільне дослідження питань повторення й наступності. Другий напрям реалізується, коли зміст на цьому етапі навчання готує учнів до успішного опанування матеріалу на подальших етапах, тобто відбувається зв'язок матеріалу, що вивчається в школі, з матеріалом, який має вивчатись у ЗВО. І тоді функції наступності наближаються до функцій пропедевтики.

На нашу думку, обидва зазначені напрями реалізації наступності важливі для забезпечення якісної математичної освіти. Уважаємо, що задля утворення системних знань учнівської та студентської молоді доцільно застосовувати інтегративний підхід, який полягає в єдності процесів інтеграції змісту, форм та методів навчання. Серед методів інтеграції в представленому дослідженні застосовуватимемо доповнювання та технологію укрупнення дидактичних одиниць, спираючись на результати попередніх досліджень авторського колективу Ю. Ботузова, В. Нічишина, Р. Ріжняк [2], де ідея технології укрупнення дидактичних одиниць реалізовувалася шляхом поєднання аналітичного та графічного підходів до розв'язування задач. У дослідженні [2] також здійснювалося поєднання процесу виконання готових завдань із розробленням нових, більш узагальнених вправ, що, безумовно, сприяє укрупненню дидактичних одиниць та надає широкі можливості для застосування дослідницького методу в навчанні.

Мета дослідження – обґрунтувати інтегративні підходи до вивчення рядів у контексті наступнісних ліній шкільного курсу математики та курсу математичного аналізу ЗВО; розкрити методичні особливості вивчення теми «Числові послідовності», проаналізувавши методи, що сприяють формуванню в учнівства цілісного математичного світогляду та розвитку навичок логічного мислення, необхідних для глибшого розуміння числових рядів.

Аналіз досліджень і публікацій. Теоретико-методичні аспекти наступності навчання в системах «школа – ЗВО», зокрема під час вивчення математичних дисциплін, з'ясовували такі науковці: А. Адріянчик, Г. Гордійчук, М. Босовський, К. Гнезділова, М. Дідовик, А. Пишкало, С. Скворцова, Н. Тарасенкова, Л. Тютюн та ін.

Аналізуючи роль наукових основ шкільного курсу математики в професійній підготовці вчителя, Л. Соколенко [3] зазначає, що одним із головних завдань цього процесу є формування розуміння математики з позицій сучасної науки. Дослідниця вказує, що важливу роль у професійній підготовці майбутнього вчителя відіграє навчання математичного аналізу, яке має бути спрямоване на глибоке опанування теоретичного матеріалу та розвиток методичної культури. При цьому необхідним є аналіз шкільної математики з погляду відображених у ній фундаментальних математичних ідей: множини, відношення, математичної структури, ізоморфізму, алгебраїчної операції тощо; наукового аналізу понять функції, величини, числа, алгоритму, фігури, що відіграють важливу роль у шкільній математиці.

Дослідженням взаємозв'язків курсу математичного аналізу та шкільного курсу математики присвятив свої наукові роботи Г. Михалін [4; 5] у контексті професійної підготовки майбутніх учителів математики та формування основ їхньої професійної культури. Автор виокремлює зміст основних положень курсу математичного аналізу, які мають особливу професійну значущість для вчителя математики, вказуючи на важливість вивчення розділу «Функція однієї змінної». У цьому розділі розглядається тема «Числові ряди», і, як зазначає Г. Михалін [4], «хоча поняття числового ряду та його суми не вивчається у шкільному курсі математики, воно неявно використовується в ньому, оскільки використовуються фрази типу “сума усіх членів нескінченно спадної геометричної прогресії”, “нескінченний десятковий дріб”, “сума нескінченної кількості доданків” тощо».

З огляду на вищезазначене, представимо можливості реалізації наступнісних ліній шкільного курсу математики в нерозривному зв'язку з курсом математичного аналізу на прикладі теми «Числові послідовності».

Матеріали та методи. У шкільному курсі математики 9 класу, згідно з чинною на сьогодні навчальною програмою [6], вивчається тема «Числові послідовності», у межах якої учні ознайомлюються з поняттями «числова послідовність», «арифметична прогресія», «геометрична прогресія», розглядають способи задання послідовностей та властивості прогресій, розв'язують вправи, що передбачають: обчислення членів прогресії; задання прогресій за даними їх членами або співвідношеннями між ними; обчислення сум перших n членів арифметичної й геометричної прогресій; використання формул загальних членів і сум прогресій для знаходження невідомих елементів прогресій.

Однією з ключових та деякою мірою обмежувальних особливостей вивчення теми «Числові послідовності» в українській школі є те, що під час введення цього поняття не встановлюється його взаємозв'язок із поняттям «функція». Це відбувається внаслідок того, що впродовж розгляду змістової лінії «Функції» в 7–9 класах не розглядаються поняття «дискретної» та «неперервної» функцій, як, наприклад, здійснено в шкільному підручнику видавництва США [7]. Тут же пропонується послідовне вивчення лінійної функції та арифметичної прогресії.

Водночас опора на попередні знання учнів, зокрема способів задання функцій (7 клас [6]), дає змогу здійснити аналогію, вводячи способи задання числових послідовностей (9 клас [6]) та пояснивши, що числову послідовність можна вважати функцією, сферою визначення якої є множина натуральних чисел або її частина (якщо послідовність скінченна).

Певні фактори, що обмежують учителя, виявляються й тоді, коли відбувається вивчення тем «Сума n перших членів арифметичної прогресії» та «Сума n перших членів геометричної прогресії». Хоча вже чинна версія навчальної програми з математики 5–9 класів [6] не містить поняття «сума нескінченної спадної геометричної прогресії», що передбачала більш глибоке та наукове пояснення математичного поняття «нескінченність» і формування в учнів розуміння поняття «границя числової послідовності». Зазначимо також, що й

у старшій школі поняття границі числової послідовності прибрано з навчальної програми [8], натомість залишилося лише поняття «границя та неперервності функції» (10 клас).

Ураховуючи психологічні особливості сучасного молодого покоління, пропонуємо розглянути можливості візуалізувати згадані вище абстрактні математичні поняття, застосовуючи метод моделювання для унаочнення числових рядів, що сприятиме полегшенню сприйняття та усвідомленню навчального матеріалу, а також дасть змогу реалізувати інтегративний підхід і принцип наступності, здійснюючи перехід від поняття «сума n перших членів арифметичної / геометричної прогресії» до «нескінченна сума числових доданків, що є членами арифметичної / геометричної прогресії». За основу візьмемо результати дослідження, проведеного колективом авторів В. Корольський, С. Шокалюк, Ю. Мельниченко [9].

Результати. Головна відмінність вивчення сум у ШКМ та ЗВО – це кількість членів послідовності, які необхідно додати. Тому, якщо скористатися знаком «сигма», записати суму n перших членів арифметичної прогресії можна так: $\sum_{k=1}^n (a + (k-1)d)$, а числовий ряд арифметичної прогресії так: $\sum_{n=1}^{\infty} (a + (n-1)d)$, де a – перший член арифметичної прогресії, d – її різниця.

Зауважимо, що в шкільному підручнику [10] в межах додаткового (необов'язкового для вивчення) підпункту розглядається тема «Сумування» та вводиться математичний знак «сигма».

Як було зазначено вище, загальний член a_n ряду можна трактувати як функцію натурального аргумента $f(n)$: $f(n) = a + (n-1)d$.

Тоді в системі декартових координат змінній n відповідатиме вісь Ox , а значенням функції $f(n)$ – вісь Oy . При цьому графіком функції $f(n)$ буде множина точок з координатами $(n; f(n))$, які розташовані на прямій з кутовим коефіцієнтом d (рис. 1).

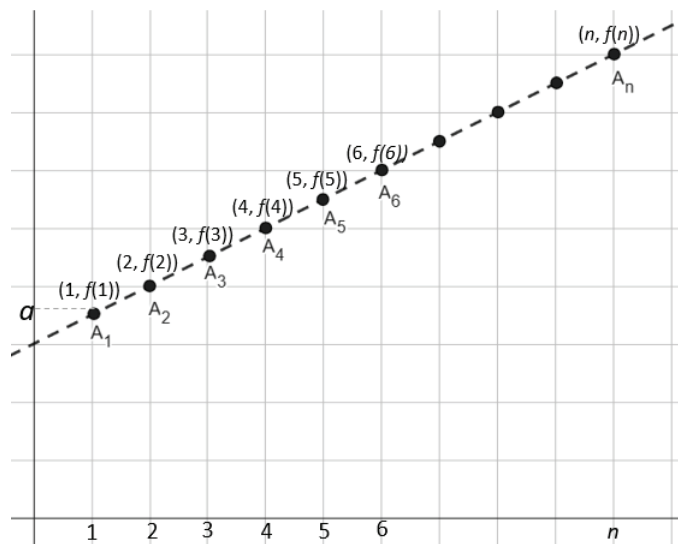


Рис. 1. Зображення графіка функції натурального аргумента $f(n) = a + (n-1)d$

Якщо врахувати, що $n \rightarrow \infty$, то на рис. 1 маємо геометричну інтерпретацію числового ряду арифметичної прогресії у вигляді ординат точок $A_n(n; f(n)) \sim (n; a_n)$ координатної площини. Тобто кожному члену арифметичної прогресії a_n відповідає точка A_n .

За допомогою розглянутої геометричної інтерпретації арифметичної прогресії можна одержати інші числові ряди з квадратурною інтерпретацією. Продемонструємо сказане на прикладі.

Приклад 1. Використаємо рис. 1 в іншій інтерпретації (рис. 2).

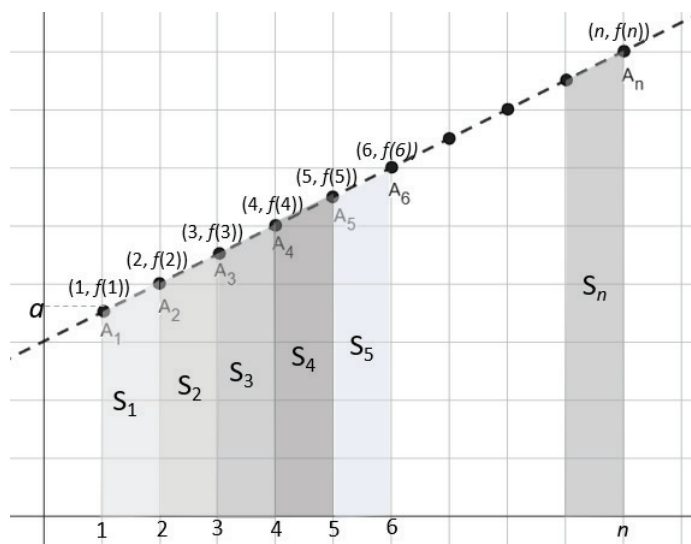


Рис. 2. $\{S_n\}$ – послідовність площ прямокутних трапецій з однаковою висотою $h = 1$

За допомогою рис. 2 і відомої формули обчислення площі трапеції одержуємо:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2}(a + (a + d)) = a + \frac{1}{2}d, \\ S_2 &= \frac{1}{2}((a + d) + (a + 2d)) = a + \frac{1}{2} \cdot 3d, \\ &\dots \\ S_n &= \frac{1}{2}((a + (n-1)d) + (a + nd)) = a + \frac{1}{2}(2n-1)d \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Так, отримано новий числовий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a + \frac{1}{2}(2n-1)d \right). \quad (2)$$

Зрозуміло, що ряд (2) має квадратурну геометричну інтерпретацію.

Ряд (2) можна отримати й іншим методом, наприклад, за допомогою геометричного змісту визначеного інтеграла, що дасть змогу реалізувати принцип наступності навчання математичних дисциплін під час переходу до старшої школи й у подальшому до ЗВО: $S = \int_a^b f(x) dx$.

У такій інтерпретації як функцію $f(x)$ використаємо лінійну функцію, що задає пряму A_1A_n (рис. 2), яка проходить через дві задані точки. Для цього використаємо точки A_1, A_2 та відоме з аналітичної геометрії рівняння прямої за двома точками (зауваження: учні можуть скласти рівняння прямої у вигляді $y = kx + b$, розв'язавши систему лінійних рівнянь і визначивши невідомі коефіцієнти k та b).

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \quad (3)$$

Як точку $(x_1; y_1)$ візьмемо $A_1(1; a)$, як точки $(x_2; y_2) - A_2(2; a + d)$. Одержимо рівняння:

$$\frac{y - a}{a + d - a} = \frac{x - 1}{2 - 1} \Rightarrow y = a + d \cdot (x - 1). \quad (4)$$

Відповідно до рис. 2, використаємо межі інтегрування: $a = n$, $b = n + 1$ й обчислюємо інтеграл для знаходження площі відповідної трапеції:

$$S_n = \int_n^{n+1} (a + d \cdot (x-1)) dx = \left(ax + d \cdot \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \right) \Big|_n^{n+1} = a(n+1-n) + d \left(\frac{(n+1)^2}{2} - (n+1) - \frac{n^2}{2} + n \right) =$$

$$= a + d \left(\frac{n^2 + 2n + 1 - n^2}{2} - 1 \right) = a + \frac{1}{2} d(2n-1) \Rightarrow \text{отримали формулу загального члену ряду (2).}$$

Якщо в загальному члені ряду (2) прийняти $a = 0$, то отримаємо ряд вигляду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} d(2n-1). \quad (5)$$

Якщо ж у ряді (5) прийняти $d = 1$, то він матиме вигляд суми арифметичної прогресії:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (2n-1) = \frac{1}{2} (1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1) + \dots) \quad (6)$$

У дужках формули (6) маємо суму всіх непарних натуральних чисел, або арифметичну прогресію з першим членом, що дорівнює 1, та різницею арифметичної прогресії, що становить 2. Обчислимо суму n перших членів вказаної арифметичної прогресії за формулою:

$$S_n = \frac{1 + (2n-1)}{2} \cdot n = n^2.$$

Так, одержується формула обчислення суми перших n непарних натуральних чисел:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1) = n^2. \quad (7)$$

Додамо до правої та лівої частин рівності (7) доданок $\underbrace{1+1+\dots+1}_{n-\text{разів}}$. У результаті цього отримаємо формулу для обчислення суми перших n парних натуральних чисел:

$$2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n = n^2 + n. \quad (8)$$

Запишемо рівність (8) у вигляді: $2(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n) = n(n+1) \Rightarrow S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ – відома формула обчислення суми n послідовних натуральних чисел, або ж суми n перших членів арифметичної прогресії, перший член якої дорівнює 1 і різниця якої також становить 1.

Наведені приклади та геометричні зображення арифметичної прогресії дають змогу розширювати коло задач, здійснювати дослідницьку та проєктну діяльність як з учнями, так і зі студентами, адже геометричне моделювання числових рядів (у лінійній чи у квадратурній інтерпретації) надає можливість унаочнити характер зміни членів ряду, виконання (або невиконання) необхідної умови його збіжності, а також обчислити суму ряду.

Геометричне моделювання числових рядів дає змогу створювати нові числові ряди різних типів, добирати порівнювані ряди, виявляти їхні специфічні закономірності, які залишаються непомітними при використанні традиційних знакових моделей, а також застосовувати ці знання в теоретичних і практичних дослідженнях. У дослідженні [9] представлено всі етапи геометричного моделювання числових рядів на прикладі гармонічного ряду та ряду геометричної прогресії. Для гармонічного ряду розглянуто зразки лінійної та квадратичної інтерпретації, виведено формули загальних членів отриманих рядів. Для ряду геометричної прогресії розглянуто випадки, коли знаменник прогресії дорівнює одиниці, менше за одиницю та більше за одиницю.

Висновки. Забезпечення наступності у викладанні математики є важливим чинником формування цілісного математичного світогляду учнів і студентів. Вона сприяє не лише глибшому розумінню математичних понять, а й розвитку логічного мислення та дослідницьких навичок. Застосування при цьому інтегративного підходу сприяє ефективному поєднанню теоретичних та практичних аспектів навчання, взаємопроникненню алгебраїчного та геометричного змісту математичних понять. Використання методів доповнювання та укрупнення дидактичних оди-

ниць сприяє більш системному засвоєнню матеріалу, що реалізує принципи наступності та перспективності математичної освіти. Такий підхід під час вивчення числових послідовностей вибудовує наступнісні лінії навчання, допомагає учням легше адаптуватися до вивчення математичного аналізу у вищій школі, сприяє розвитку дослідницьких навичок, забезпечуючи глибше розуміння структури числових рядів та їх застосувань.

Література:

1. Босовський М. В. Елементи математичного аналізу та проблема наступності. *Didactics of mathematics: Problems and Investigations*. 2005. Вип. 24. С. 127–132.
2. Ботузова Ю., Нічишина В., Різняк Р. Наступність методів навчання розв'язування математичних задач у школі та закладі вищої освіти: контекст інтегративного підходу. *Фізико-математична освіта*, 2022. Том 36. № 4. С. 16–25.
3. Соколенко Л. Роль наукових основ шкільного курсу математики у професійній підготовці вчителя. *Вісник Чернігівського національного педагогічного університету. Серія: Педагогічні науки*. 2015. Вип. 130. С. 214–219.
4. Михалін Г. О. Професійна підготовка вчителя математики у процесі навчання математичного аналізу. Київ : НПУ імені М.П. Драгоманова, 2003. 320 с.
5. Михалін Г. О. Формування основ професійної культури вчителя математики у процесі навчання математичного аналізу : автореф. дис. ... д-ра пед. наук: 13.00.04. Київ, 2004. 37 с.
6. Математика. 5–9 класи. Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів (Програма затверджена Наказом Міністерства освіти і науки України від 07.06.2017 № 804). URL: <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi/navchalni-programi-dlya-6-9-klasiv>. (дата звернення: 14.02.2025 р.)
7. *Reveal Algebra*. Volume 1. Mc Graw Hill Education. 2020.
8. Навчальна програма з математики для 10-11 класів закладів загальної середньої освіти. Профільний рівень. URL: <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>. (дата звернення: 14.02.2025 р.)
9. Корольський В. В., Шокалюк С. В., Мельниченко Ю. А. Теоретично-Методичні засади геометричного моделювання числових рядів. *Фізико-математична освіта*. 2018. Вип. 4(18). С. 81–89.
10. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра: підруч. для 9 кл. Харків : Гімназія, 2017. 272 с.

References:

1. Bosovskyi, M.V. (2005). Elementy matematychnoho analizu ta problema nastupnosti [Elements of mathematical analysis and the problem of continuity]. *Didactics of mathematics: Problems and Investigations*, 24, 127–132 [in Ukrainian]
2. Botuzova, Yu., Nychyshyna, V., & Rizhniak, R. (2022). Nastupnist metodiv navchannia rozv'язuvannia matematychnykh zadach u shkoli ta zakladi vyshchoi osvity: kontekst intehratyvnoho pidkходу [Continuity of teaching methods for solving mathematical problems in schools and university: the context of the integrative approach]. *Fizyko-matematychna osvita*, 36(4), P. 16–25 [in Ukrainian]
3. Sokolenko, L. (2015). Rol naukovykh osnov shkilnoho kursu matematyky u profesiinii pidhotovtsi vchytelia [The role of the scientific foundations of the school course of mathematics in the professional training of the teacher]. *Visnyk Chernihivskoho natsionalnoho pedahohichnoho universytetu. Serii: Pedahohichni nauky*, 130, 214–219 [in Ukrainian]
4. Mykhalin, H.O. (2003). Profesiina pidhotovka vchytelia matematyky u protsesi navchannia matematychnoho analizu [Professional training of a mathematics teacher in the process of learning mathematical analysis]. Kyiv: NPU imeni M.P. Drahomanova. 320 p. [in Ukrainian]
5. Mykhalin, H.O. (2004). Formuvannia osnov profesiinoi kultury vchytelia matematyky u protsesi navchannia matematychnoho analizu [Formation of the foundations of the professional culture of the teacher of mathematics in the process of learning mathematical analysis]. *Extended abstract of Doctor's thesis*. Kyiv. 37 p. [in Ukrainian]
6. Matematyka. 5-9 klasy. Navchalna prohrama dlia zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv [Mathematics. Grades 5-9. Curriculum for secondary schools] (Prohrama zatverdzhena Nakazom Ministerstva osvity i nauky Ukrainy vid 07.06.2017 № 804). Retrieved from: <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi/navchalni-programi-dlya-6-9-klasiv>. [in Ukrainian]

7. Reveal Algebra. Volume 1. Ms Graw Hill Edusation. 2020. [in English]
8. Navchalna prohrama z matematyky dlia 10–11 klasiv zakladiv zahalnoi serednoi osvity. Profilnyi riven [The curriculum in mathematics for grades 10-11. Profile level]. Retrieved from: <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>. [in Ukrainian]
9. Korolskyi, V.V., Shokaliuk, S.V., & Melnychenko, Yu.A. (2018). Teoretychno-Teoretychno-metodychni zasady heometrychnoho modeliuvannia chyslovykh riadiv [Theoretical and methodological principles of geometric modeling numerical series]. *Fizyko-matematychna osvita*, 4(18), 81–89 [in Ukrainian]
10. Merzliak, A.H., Polonskyi, V.B., & Yakir, M.S. (2017). Alhebra: pidruch. dlia 9 kl. [Algebra: Text-book]. Kharkiv: Himnaziia. 272 p. [in Ukrainian]