

УДК 51(072)

DOI <https://doi.org/10.32782/cusu-pmtp-2023-2-1>

МЕТОД ЗАМІНИ ЗМІННОЇ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Ботузова Юлія Володимирівна,

докторка педагогічних наук, доцентка,

доцентка кафедри математики та методики її навчання

Центральноукраїнського державного університету імені Володимира Винниченка

ORCID ID: 0000-0002-1313-0010

Устенко Анастасія Валеріївна,

магістрантка факультету математики, природничих наук та технологій

Центральноукраїнського державного університету імені Володимира Винниченка

ORCID ID: 0009-0006-9868-5707

У статті здійснюється дослідження особливостей застосування методу заміни змінної при розв'язуванні різноманітних математичних задач, які наскрізно зустрічаються як у шкільному курсі математики, так і в курсах вищої математики. Вивчення математичних концепцій та методів вимагає від учнів послідовного, систематичного засвоєння, яке в разі порушень може призвести до утруднень на більш пізніх етапах навчання. Основний акцент у дослідженні ставиться на ролі методу заміни змінної у забезпеченні наступності навчання математики. Основні завдання, які були виконані в дослідженні: аналіз та узагальнення важливості застосування даного методу в контексті формування математичної компетентності учнів, розкриття особливостей формування навичок його використання на різних етапах навчання, а також виявлення його потенціалу для компенсації навчальних втрат, які виникли внаслідок дистанційного навчання, зумовленого пандемією та військовими діями.

У процесі роботи над дослідженням здійснювався аналіз наукових і методичних джерел, дисертаційних робіт, навчальних програм та концепцій, вивчення та аналіз шкільних підручників з математики.

Встановлено, що метод заміни змінної є універсальною технікою розв'язування рівнянь у шкільному курсі математики, опанування якою відкриває можливості до подальшого вивчення курсів вищої математики. Цей метод базується на ідеї заміни однієї змінної іншою, щоб перетворити вихідне рівняння на більш просту, або стандартну форму. Зазвичай, у результаті застосування методу заміни змінної, рівняння спрощуються до такого вигляду, коли можна визначити значення змінної більш простими діями. Основоположне значення тут мають знання способів розв'язування саме квадратних рівнянь, до яких найчастіше приводить заміна, а також вміння та навички їх застосовувати. У статті представлено кроки опанування методом заміни змінної у школі, починаючи від 8 класу і до завершення вивчення шкільного курсу математики. Окреслено перспективи застосування методу при вирішенні задач вищої математики.

Ключові слова: метод заміни змінної, квадратні рівняння, наступність навчання математики, шкільний курс математики, методика навчання математики.

Botuzova Yuliia, Ustenko Anastasiia. Change of variables method in the school course of mathematics

The article investigates the peculiarities of using change of variables method in solving various mathematical problems, which are common both in school mathematics courses and in higher mathematics courses. Studying mathematical concepts and methods requires consistent, systematic learning from students, which in case of violations can lead to difficulties at later stages of learning. The main focus of the research is on the role of change of variables method in ensuring the continuity of mathematics education. The main tasks that were performed in the study: analysis and generalization of the importance of applying this method in the context of the formation of students' mathematical competence, revealing the features of the formation of skills in its use at various stages of education, identifying its potential for compensating educational losses that occurred as a result of distance learning, caused by the pandemic and military operations.

In the process of working on the research, the analysis of scientific and methodical sources, dissertations, educational programs and concepts, study and analysis of school textbooks on mathematics was carried out.

It has been established that change of variables method is a universal technique for solving equations in a school mathematics course, the mastery of which opens up opportunities for further study of higher mathematics courses.

This method is based on the idea of replacing one variable with another to transform the original equation into a simpler, or standard, form. Usually, as a result of applying change of variables method, the equations are simplified to such a form that the value of the variable can be determined by simpler operations. Of fundamental importance here are the knowledge of ways to solve quadratic equations, to which substitution most often leads, as well as the ability and skills to apply them. The article presents the steps of mastering the change of variables method at school, starting from the 8th grade and until the completion of the school mathematics course. The prospects of using the method in solving higher mathematics problems are outlined.

Key words: change of variables method, quadratic equations, continuity of teaching math, school mathematics course, methods of teaching math.

Вступ. Математична освіта в Україні та проблеми забезпечення її якості – це питання, які впродовж останніх років викликають гострі дискусії та обговорюються на різних рівнях: у середовищі батьків, педагогів, роботодавців, освітніх управлінців та політиків, науковців [10].

Математика є обов'язковим предметом для вивчення у закладах загальної середньої освіти, а останні роки і обов'язковим предметом, з якого абітурієнти складають зовнішнє незалежне оцінювання (ЗНО або НМТ).

Значення математичної освіти для суспільства чітко окреслено у Концепції математичної освіти 12-річної школи [2], в якій йдеться, зокрема, про те, що якість математичної підготовки молодого покоління – індикатор готовності суспільства до соціально-економічного розвитку, мобільності особистості в освоєнні та впровадженні сучасної техніки, нових технологій.

Моніторингові дослідження TIMSS (2007 р., 2011 р.) та PISA-2018, проведені в Україні, мали різну мету та цілі, але їх результати в комплексі дозволили виявити наявні проблеми, зокрема в якості шкільної математичної освіти. Внаслідок цього актуалізувалися питання забезпечення наступності навчання математики, посилення мотивації та зацікавленості учнів у її вивченні, якості професійної підготовки вчителів математики. Одним із національних політичних рішень, після оприлюднення результатів PISA-2018, було оголошення 2020–2021 н.р. Роком математики в Україні, що мало привернути увагу суспільства до розвитку математичної грамотності як в учнів, так і у всіх громадян нашої держави. Основний акцент Року математики був зроблений на підвищенні професійної майстерності майбутніх учителів математики та вчителів-практиків. Це важливо, адже саме вчителі відіграють визначальну роль у формуванні математичної грамотності особистості.

Система освіти України останні три роки функціонує в умовах надзвичайної складності: спочатку пандемія COVID-19, виклики дистанційного навчання та його організації, тепер повномасштабна військова агресія росії із ще більшими викликами. Педагоги докладають усіх можливих зусиль, щоб гарантувати право молодого покоління на якісну освіту. Проте, звісно, в таких умовах неможливо уникнути навчальних втрат, які з'являються через тривалі пропуски занять, неефективні форми викладання, значні незаплановані перерви в навчанні, пов'язані із пандемією та війною. Особливо актуальним це стає у контексті вивчення математики – предмету, що вимагає системності та наступності у засвоєнні понять та методів.

Вивчення математичних концепцій та методів вимагає від учнів послідовного засвоєння, яке в разі порушень може призвести до утруднень на більш пізніх етапах навчання. Отже, **метою статті** є дослідження методу заміни змінної у шкільному курсі математики та визначення його ролі у забезпеченні наступності навчання математики. Основним завданням статті є аналіз та узагальнення важливості даного методу в контексті формування математичної компетентності учнів, розкриття особливостей його застосування на різних етапах навчання, а також виявлення його потенціалу для компенсації навчальних втрат, які виникли внаслідок дистанційного навчання, зумовленого пандемією та військовими діями.

Матеріали та методи. У ході дослідження використовувалась низка методів, зокрема такі, як аналіз наукових і методичних джерел, дисертаційних робіт, навчальних програм та концеп-

цій, вивчення та аналіз шкільних підручників з математики, навчальних посібників з підготовки до ЗНО/НМТ. Також було здійснено узагальнення та систематизацію результатів досліджень, моніторингових та опитувань із питань математичної освіти, які були проведені на різних рівнях, як на міжнародному, так і національному.

Результати. Уперше з методом заміни змінної, здобувачі освіти мають познайомитися у курсі алгебри 8 класу, вивчаючи тему «Квадратні рівняння» [6], а саме при розгляді навчального матеріалу «розв'язування рівнянь, які зводяться до квадратних».

Метод заміни змінної є важливою технікою розв'язування рівнянь та нерівностей у шкільному курсі математики, опанування якою відкриває можливості до подальшого вивчення курсів вищої математики. Цей метод базується на ідеї заміни однієї змінної іншою, щоб перетворити вихідне рівняння або нерівність на більш просту, або стандартну форму. Зазвичай, у результаті застосування методу заміни змінної, рівняння або нерівність спрощуються до такого вигляду, коли можна визначити значення змінної більш простими діями. Основоположене значення тут мають знання способів розв'язування саме квадратних рівнянь та нерівностей, до яких найчастіше приводить заміна, а також вміння та навички їх застосовувати.

У актуальних на сьогоднішній день підручниках з алгебри для 8 класу 2021 року випуску [1; 3; 7; 9; 11] представлений теоретичний матеріал, підкріплений прикладами щодо застосування методу заміни змінної під час розв'язування бікватратних рівнянь виду $ax^4 + bx^2 + c = 0$, де x – змінна, a, b, c – деякі числа, причому $a \neq 0$. Розглянемо одне з таких рівнянь: «Розв'яжіть рівняння» [7, с. 174].

Розв'язання: у рівнянні $x^4 - 2x^2 - 24 = 0$ зробимо заміну: $t = x^2$, де $t \geq 0$, тоді $t^2 = x^4$ і задане в умові рівняння переписується у такому вигляді: $t^2 - 2t - 24 = 0$. Використаємо один із відомих способів розв'язування квадратних рівнянь, наприклад, за допомогою дискримінанту (найбільш популярний спосіб серед учнів), чи застосувавши теорему Вієта, та знайдемо корені утвореного рівняння: $t_1 = -4, t_2 = 6$. Враховуючи умову $t \geq 0$, накладену на значення змінної t під час введення заміни, скажемо, що значення $t_1 = -4$ не задовольняє цю умову, тому повертаємось до початкової змінної x , записуючи рівняння: $x^2 = 6$ – неповне квадратне рівняння. Тому $x = \pm\sqrt{6}$.

Відповідь: $x = \pm\sqrt{6}$.

Автори підручників для 8 класу з алгебри пропонують низку інших рівнянь, які також розв'язуються методом заміни. Доцільним вбачається, зокрема, продемонструвати учням, що не лише x^2 , але й більш складні вирази можна замінити, спростивши при цьому вигляд рівняння. Наприклад, $4(x^2 - x + 1)^2 - 5(x^2 - x + 1) = 21$ [11, с. 254], де замінити необхідно вираз $(x^2 - x + 1) = t$, переписавши задане рівняння наступним чином: $4t^2 - 5t = 21$ або ж $4t^2 - 5t - 21 = 0$, що значно спрощує його розв'язання. Одним із важливих наголосів, які слід поставити, при вивченні та використанні методу заміни, є необхідність повертатися до початкової змінної. Адже основними типовими помилками учнів є: зупинити процес розв'язання, після того як знайшли корені проміжної змінної, у нашому випадку t (при цьому в більшості випадків це стається через неухважність та стереотипність мислення – якщо невідома, то x , – тому часто розв'язуємо рівняння $4t^2 - 5t - 21 = 0$, а корені записуємо $x_1 = -1\frac{3}{4}, x_2 = 3$ та вказуємо їх у відповідь); досить типовим для учнів є також відкидання стороннього кореня рівняння, наприклад, рівняння $4t^2 - 5t - 21 = 0$, знайдені корені $t_1 = -1\frac{3}{4}, t_2 = 3$, при цьому учні вказують, що $t_1 = -1\frac{3}{4}$ – сторонній корінь, хоча ніяких обмежень на змінну t під час введення заміни не накладалось. Зважаючи на вказані типові помилки, вчитель може продумати власну стратегію викладання навчального матеріалу, яка б сприяла їхньому уникненню. До речі, у деяких сучасних українських підручниках [1; 9] пропонуються вправи на розв'язування рівнянь з різними назвами змінних: a, b, u, t, y, n тощо, які дозволяють не прив'язувати стереотипів на невідомі в задачах.

Повертаючись до нашого прикладу $4(x^2 - x + 1)^2 - 5(x^2 - x + 1) = 21$, зазначимо, що його розв'язання вимагає виконання послідовної роботи з трьома квадратними рівняннями: 1) $4t^2 - 5t - 21 = 0$; 2) $x^2 - x + 1 = -\frac{7}{4}$; 3) $x^2 - x + 1 = 3$, – останні два рівняння утворюються на етапі повернення до початкової змінної. Отже, виконання таких вправ, дозволяє також відпрацювати навички розв'язування квадратних рівнянь.

Враховуючи необхідність реалізації принципу наступності в навчанні математики та спираючись на попередньо здобуті учнями знання, у якості пропедевтики вивчення ірраціональних рівнянь методом заміни підручники [1; 3; 7] пропонують такі вправи: «Розв'яжіть рівняння: $8\sqrt{x} + x + 7 = 0$ [7, с.175], $x - \sqrt{x} - 6 = 0$ [3, с. 220], $x - 4\sqrt{x} + 3 = 0$ [1, с.197]». При розв'язуванні запропонованих вище вправ виконується заміна $\sqrt{x} = t$, тоді $x = t^2$. Одержавши значення змінної t та повертаючись до початкової змінної, слід враховувати, що $\sqrt{x} \geq 0$. Покажемо це на одному з прикладів: Розв'яжіть рівняння: $x - \sqrt{x} - 6 = 0$ [3, с. 220].

Розв'язання: $x - \sqrt{x} - 6 = 0$, покладемо $\sqrt{x} = t$, тоді $x = t^2$. Перепишемо задане в умові рівняння у вигляді $t^2 - t - 6 = 0$ та знайдемо корені $t_1 = -2, t_2 = 3$. Повернемося до початкової змінної x : $\begin{cases} \sqrt{x} = -2, \\ x = 9 \end{cases}$. Перше рівняння із сукупності не має коренів, а тому розв'язком вихідного рівняння є: $x = 9$.

Відповідь: $x=9$.

У підручнику [1, с. 197] також пропонуються до розгляду завдання, подібні до наведених попередньо, як от: $x^2 + (\sqrt{x})^2 - 12 = 0$, але виконувати заміну тут не потрібно. Після застосування властивості квадратного кореня: $(\sqrt{a})^2 = a, a \geq 0$, – рівняння перетворюється на $x^2 + x - 12 = 0$, де $x \geq 0$ (ОДЗ рівняння). Тому знайшовши корені, $x_1 = -4, x_2 = 3$, говоримо, що $x_1 = -4 < 0$ – сторонній корінь, записуючи у відповідь лише значення: $x = 3$.

Учням, які готуються до складання ЗНО/НМТ з математики, часто трапляються задачі, що містять модуль. Покажемо зразок завдання, яке можна вирішити, принаймні двома способами, запропоноване у [5, с. 29]: «Укажіть кількість коренів рівняння $x^2 - 9|x| + 20 = 0$, які належать проміжку $(-5; 5]$ ».

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	Жодного

Розв'язання:

I спосіб (за властивостями модуля). Використаємо те, що $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0; \end{cases}$, та із заданого рівняння запишемо два: $\begin{cases} x^2 - 9x + 20 = 0, & x \geq 0; \\ x^2 + 9x + 20 = 0, & x < 0. \end{cases}$ Розв'язавши кожне з них, маємо: $\begin{cases} x_1 = 4, x_2 = 5, & x \geq 0; \\ x_3 = -4, x_4 = -5, & x < 0. \end{cases}$ Враховуючи умови, накладені на змінну x у вигляді нерівностей, зазначаємо, що задане в умові завдання має 4 корені, при цьому лише три з них належать проміжку $(-5; 5]$, тому вкажемо відповідь – В.

II спосіб (метод заміни змінної). У даному прикладі застосування методу заміни не є очевидним, але слід актуалізувати наступну властивість: $x^2 = |x|^2$ та переписати задане рівняння у вигляді $|x|^2 - 9|x| + 20 = 0$. Тепер з легкістю розпізнається заміна $t = |x|$ і рівняння приймає вигляд: $t^2 - 9t + 20 = 0$. Знайшовши корені $t_1 = 4, t_2 = 5$, повертаємося до попередньої змінної: $\begin{cases} |x| = 4; \\ |x| = 5; \end{cases}$ звідки $\begin{cases} x_{1,2} = \pm 4; \\ x_{3,4} = \pm 5. \end{cases}$ Враховуючи проміжок $(-5; 5]$, робимо висновок, що на ньому знаходяться всього три корені із чотирьох знайдених.

Відповідь: В.

Вирішення задач кількома способами – це один із шляхів забезпечення наступності навчання математики, адже учням відкриваються можливості різних способів міркувань, що приводять до одного й того ж результату, виявляючи взаємозв'язок та спільність понять. У результаті через конкретні завдання розкриваються загальні методи й відбувається узагальнення. Окрім того, наступність передбачає поступове розширення знань на основі раніше здобутих.

Так крокуючи вперед курсом математики основної школи, у 9 класі здобувачі освіти мають змогу розширити свої знання щодо сфери застосування методу заміни при розв'язуванні математичних задач. Зокрема, у темі «Квадратична функція» вивчаються методи розв'язування систем двох рівнянь з двома змінними, серед яких – метод заміни змінної.

Розглянемо особливості його застосування на прикладах із діючих підручників алгебри для 9 класу ЗЗСО: «Розв'язати систему рівнянь: а) $\begin{cases} x + y - xy = 1; \\ xy(x + y) = 20; \end{cases}$ [8, с. 142],

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{6y}{x} = 5; \\ x^2 + 4xy - 3y^2 = 18; \end{cases} \quad [8, \text{ с.142}], \text{ в) } \begin{cases} \frac{x-2y}{x+y} - \frac{x+y}{x-2y} = \frac{15}{4}; \\ 4x + 5y = 3; \end{cases} \quad [4, \text{ с. 131}].$$

Наводити повне розв'язання цих систем в межах дослідження не вбачаємо можливим, прокоментуємо лише застосування методу, що є предметом дослідження. Отже, у прикладі а) вводиться заміна $a = x + y$, $b = xy$, яка дозволяє спростити задачу до вигляду: $\begin{cases} a - b = 1; \\ b \cdot a = 20; \end{cases}$ – розв'язати таку систему можна навіть усно. У прикладах б) та в), враховуючи наявність у системах дробово-раціональних виразів, спочатку встановлюється ОДЗ, а потім використовується підхід заміни взаємно обернених виразів. Варто зазначити, що з таким типом заміни учні могли працювати і у 8 класі, в межах вивчення теми «Рівняння, які зводяться до квадратних». Так, у пункті б) можна ввести заміну $\frac{x}{y} = t$, тоді, відповідно, $\frac{y}{x} = \frac{1}{t}$. При цьому відбудеться спрощення лише першого рівняння системи до вигляду: $t + \frac{6}{t} = 5$. Отримане рівняння після низки тотожних перетворень зводиться до квадратного. (Після знаходження значення $t_1 = 2, t_2 = 3$ та повернення до початкових змінних, вихідна система перетвориться на сукупність двох більш простіших систем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{y} = 2; \\ x^2 + 4xy - 3y^2 = 18; \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{y} = 3; \\ x^2 + 4xy - 3y^2 = 18; \end{array} \right\},$$

які розв'яжуться методом підстановки, адже з перших рівнянь кожної із систем сукупності легко знайти співвідношення між змінними x та y . Аналогічний підхід застосовується і до пункту в): визначаємо ОДЗ та покладемо $t = \frac{x-2y}{x+y}, \frac{1}{t} = \frac{x+y}{x-2y}$. Зауважимо, що якщо не шукати ОДЗ, то обов'язковим є етап перевірки отриманих коренів.

У навчальному матеріалі з алгебри та початків аналізу 10-11 класів виявляється ще більший потенціал методу заміни змінної, адже він застосовується при розв'язуванні ірраціональних (а, б), тригонометричних (в, г), показникових (д), логарифмічних (е) рівнянь: «Розв'язати рівняння: а) $\sqrt{x+5} - 3\sqrt[4]{x+5} + 2 = 0$; б) $\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 = 3x + 7$; в) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$; г) $\operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x = 3$; д) $25^x - 5^x - 20 = 0$; е) $\log_2^2 x - \log_3 x - 2 = 0$ ».

Практичний досвід застосування методу заміни змінної в квадратних, бікватратних, дробово-раціональних рівняннях, здобутий у 8-9 класах, допомагає учням зорієнтуватися у виборі заміни для тригонометричних, ірраціональних, логарифмічних та показникових рівнянь. Опанування навичками використання цього методу дозволяє учням зорієнтуватися у більш складних випадках, коли заміна в задачі не є очевидною.

Висновки. Наведені у дослідженні приклади та аргументи дозволяють дійти висновку, що універсальним методом, який використовується для розв'язування багатьох видів рівнянь, є метод заміни змінної. Він має важливе значення в процесі реалізації наступності навчання математичних дисциплін, адже його застосування утворює суцільну лінію, яка починається з вивчення

бікватратних рівнянь в шкільному курсі математики та тягнеться до знаходження та обчислення інтегралів, розв'язування диференціальних рівнянь тощо у курсі математичного аналізу закладів вищої освіти. Не охоплені у статті проблеми використання методу заміни змінних у курсах вищої математики ЗВО становлять проблематику наших майбутніх публікацій.

Література:

1. Бевз Г.П., Бевз В.Г. Алгебра : підруч. для 8 кл. закладів заг. серед. освіти / 2-ге видання, переробл. Київ : Видавничий дім «Освіта», 2021. 256 с.
2. Бурда М., Тарасенкова Н., Васильєва Д. Концепція математичної освіти 12-річної школи» (проект). *Математика в рідній школі*. 2018. № 9. С. 2–8.
3. Істер О.С. Алгебра : підруч. для 8 кл. закладів заг. серед. освіти / 2-ге видання, переробл. Київ : Генеза, 2021. 270 с.
4. Істер О.С. Алгебра : підруч. для 9 кл. закладів заг. серед. освіти / 2-ге видання, переробл. Київ : Генеза, 2022. 272 с.
5. Карпик В.В. Алгебраїчні рівняння і нерівності, їх системи. Задачі на складання рівнянь. Тренувальна тестова робота № 2. *Математика в школах України*. № 7(271). 2010. С. 28–32.
6. Математика. Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів (Програма затверджена Наказом Міністерства освіти і науки України від 07.06.2017 № 804). URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalniprogrami/navchalni-programi-5-9-klas>. (дата звернення: 26.08.2023 р.)
7. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра : підруч. для 8 кл. закладів заг. серед. освіти / 2-ге видання, переробл. Харків : Гімназія, 2021. 240 с.
8. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра : підруч. для 9 кл. закладів заг. серед. освіти / 2-ге видання, переробл. Харків : Гімназія, 2021. 288 с.
9. Прокопенко Н., Захарійченко Ю., Кінашук Н. Алгебра : підруч. для 8 кл. закладів заг. серед. освіти / 2-ге видання, переробл. Харків : Видавництво «Ранок», 2021. 272 с.
10. Скиба М., Плакош А. Розвиток математичної грамотності в Україні та світі. URL: <https://drive.google.com/file/d/1xbfpcJNblPHq92LP2XNN4PEKY9soalO/view> (дата звернення: 26.08.2023 р.)
11. Тарасенкова Н., Богатирьова І., Коломієць О. Алгебра : підруч. для 8 кл. закладів заг. серед. освіти / 2-ге видання, переробл. Київ : «Оріон», 2021. 294 с.

References:

1. Bezv H.P., Bezv V.H. (2021). Algebra: pidruchnyk dlia 8 klasu zakladiv zahalnoi serednoi osvity. [Algebra: a textbook for the 8th grade of secondary schools]. Kyiv: Vydavnychi dim «Osvita». 256 p. [in Ukrainian]
2. Burda M., Tarasenkova N., Vasyliieva D., Vashulenko O. (2018). Kontseptsiiia matematychnoi osvity 12-richnoi shkoly» (proiekt). [The concept of mathematics education of a 12-year school" (project)] *Matematyka v ridnii shkoli*. №9. P.2-8. [in Ukrainian]
3. Ister O.S. (2021). Algebra: pidruchnyk dlia 8 klasu zakladiv zahalnoi serednoi osvity. [Algebra: a textbook for the 8th grade of secondary schools]. Kyiv: Heneza. 270 p. [in Ukrainian]
4. Ister O.S. (2022). Algebra: pidruchnyk dlia 9 klasu zakladiv zahalnoi serednoi osvity. [Algebra: a textbook for the 9th grade of secondary schools]. Kyiv: Heneza. 272 p. [in Ukrainian]
5. Karpik V.V. (2010). Algebraichni rivniannia i nerivnosti, yikh systemy. Zadachi na skladannia rivnian. Trenuvalna testova robota № 2. [Algebraic equations and inequalities, their systems. Equations problems. Training test work № 2]. *Matematyka v shkolakh Ukrainy*. № 7 (271). P.28-32. [in Ukrainian]
6. Matematika. Navchalna prohrama dlia zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv (Prohrama zatverdzhena Nakazom Ministerstva osvity i nauky Ukrainy vid 07.06.2017 № 804). [Math. Curriculum for secondary schools]. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalniprogrami/navchalni-programi-5-9-klas>. [in Ukrainian]
7. Merzliak A.H., Polonskyi V.B., Yakir M.S. (2021). Algebra: pidruchnyk dlia 8 klasu zakladiv zahalnoi serednoi osvity. [Algebra: a textbook for the 8th grade of secondary schools]. Kharkiv: Himnaziia. 240 p. [in Ukrainian]
8. Merzliak A.H., Polonskyi V.B., Yakir M.S. (2021). Algebra: pidruchnyk dlia 9 klasu zakladiv zahalnoi serednoi osvity. [Algebra: a textbook for the 9th grade of secondary schools]. Kharkiv: Himnaziia. 288 p. [in Ukrainian]
9. Prokopenko N., Zakhariichenko Yu., Kinashchuk N. (2021). Algebra: pidruchnyk dlia 8 klasu zakladiv zahalnoi serednoi osvity. [Algebra: a textbook for the 8th grade of secondary schools]. Kharkiv: Vydavnytstvo «Ranok». 272 p. [in Ukrainian]
10. Skyba M., Plakosh A. (2021). Rozvytok matematychnoi hramotnosti v Ukraini ta sviti. [Development of mathematical literacy in Ukraine and around the world]. URL: <https://drive.google.com/file/d/1xbfpcJNblPHq92LP2XNN4PEKY9soalO/view>. [in Ukrainian]
11. Tarasenkova N., Bohatyrova I., Kolomiets O., Serdiuk Z. (2021). Algebra: pidruchnyk dlia 8 klasu zakladiv zahalnoi serednoi osvity. [Algebra: a textbook for the 8th grade of secondary schools]. Kyiv: «Orion». 294 p. [in Ukrainian]