УДК 378.016:517
DOI https://doi.org/10.32782/cusu-pmtp-2026-1-12

ФОРМУВАННЯ ПОНЯТТЯ ГРАНИЦІ ФУНКЦІЇ У СТУДЕНТІВ ЗАКЛАДІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ

Томащук Олексій Петрович,
кандидат педагогічних наук, доцент,
доцент кафедри прикладної математики
Державного університету «Київський авіаційний інститут»
ORCID ID: 0000-0001-5631-3418

Самусенко Петро Федорович,
доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей
Національного технічного університету України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
ORCID ID: 0000-0002-4241-6173

Підгорна Тетяна Володимирівна,
доктор педагогічних наук, доцент,
професор кафедри комп’ютерних наук та інформаційних систем
Державного торговельно-економічного університету
ORCID ID: 0000-0002-1414-3489

Лещинський Олег Львович,
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
викладач Фахового коледжу інженерії, управління та землевпорядкування
Державного університету «Київський авіаційний інститут»
ORCID ID: 0000-0001-6005-7779

Статтю присвячено методиці формування поняття границі функції у студентів закладів вищої освіти. Актуальність дослідження обумовлена тим, що сучасне суспільство розвивається в умовах активного застосування математичних методів у різноманітних сферах людської діяльності. Це зумовлює зростання вимог до рівня математичної підготовки фахівців різних спеціальностей. Важливою складовою цієї підготовки є володіння здобувачами освіти фундаментальними математичними поняттями. До таких понять, зокрема, належить поняття границі функції. Оволодіння цим поняттям сприяє кращому розумінню студентами інших ключових понять математичного аналізу: неперервність функції, похідна функції, визначений інтеграл тощо, які ґрунтуються на ідеї граничного переходу.

У статті проведено аналіз вітчизняних і зарубіжних публікацій з теми дослідження.

Розроблена методика формування поняття границі функції передбачає ознайомлення студентів із трьома означеннями границі функції у точці в такій послідовності: мовою послідовностей (за Гейне), мовою околів та мовою «ε-δ» (за Коші). Вибрана послідовність дає змогу реалізувати принцип: від означення, більш доступного для розуміння студентами, до складнішого. Зважаючи на складність формальних означень поняття границі функції в точці, їх уведення здійснено конкретно-індуктивним методом із залученням відповідних графічних ілюстрацій. З метою кращого розуміння студентами більш складніших означень границі функції в точці (мовою околів та мовою «ε-δ») було залучено динамічні ілюстрації, реалізовані засобами GeoGebra.

Запропонована методика введення поняття границі функції ґрунтується на поєднанні наочних міркувань з їх подальшим аналітичним обґрунтуванням, що дає змогу студентам самостійно дійти до формулювання різних означень границі функції. Такий підхід сприяє свідомому засвоєнню студентами поняття границі функції.

Ключові слова: *вища математика, математичний аналіз, методика формування математичного поняття, границя функції.*

Tomashchuk Oleksii, Samusenko Petro, Pidgorna Tetyana, Leshchynskyi Oleh. Formation of the concept of the limit of a function among students of higher education institutions

The article is devoted to the methodology of forming the concept of a limit of a function for students of higher education institutions. The relevance of the study is determined by the fact that modern society is developing under conditions of the active application of mathematical methods in various spheres of human activity. This leads to increased requirements for the level of mathematical training of specialists in different fields. An important component of such training is students' mastery of fundamental mathematical concepts. Among these concepts, in particular, is the concept of a limit of a function. Mastering this concept contributes to a better understanding by students of other key concepts of mathematical analysis, such as function continuity, the derivative, and the definite integral, which are based on the idea of a limiting process.

The article analyzes domestic and foreign publications on the research topic.

The developed methodology for forming the concept of a limit of a function involves introducing students to three definitions of the limit of a function at a point in the following sequence: in terms of sequences (according to Heine), in terms of neighborhoods, and in terms of the «ε–δ» definition (according to Cauchy). The chosen sequence makes it possible to implement the principle of moving from a definition that is more accessible for students' understanding to a more complex one. Given the complexity of the formal definitions of the concept of a limit of a function at a point, their introduction is carried out using a concrete–inductive method with the involvement of appropriate graphical illustrations. In order to enhance students' understanding of the more complex definitions of the limit of a function at a point (in terms of neighborhoods and the «ε–δ» definition), dynamic visualizations implemented using GeoGebra were employed.

The proposed methodology for introducing the concept of a limit of a function is based on combining visual reasoning with subsequent analytical justification, which enables students to independently arrive at the formulation of various definitions of a function limit. This approach promotes the conscious and meaningful acquisition of the concept of a function limit by students.

Key words: *higher mathematics, mathematical analysis, methodology of forming a mathematical concept, limit of a function.*

Вступ. Математика є універсальною мовою науки та важливим інструментом для розуміння й моделювання навколишнього світу. Вона сьогодні перестала бути лише наукою для математиків: її методи проникають у всі сфери діяльності людини та відкривають нові можливості для розуміння світу. Вміння логічно мислити, аналізувати інформацію та моделювати процеси стає необхідним не лише для професійних математиків, а й для спеціалістів у різних галузях – від ІТ і медицини до менеджменту та соціальних наук. Володіння математичними методами допомагає не лише розв'язувати складні задачі, а й ефективно взаємодіяти із цифровим світом, знаходити оптимальні шляхи та приймати обґрунтовані рішення. У зв'язку із цим постає нагальна потреба вдосконалювати математичну підготовку студентів закладів вищої освіти. Важливою її складовою є володіння здобувачами освіти фундаментальними математичними поняттями. До таких понять, зокрема, належить поняття границі функції. Оволодіння цим поняттям студентами сприяє кращому розумінню інших ключових понять математичного аналізу: неперервність функції, похідна функції, визначений інтеграл тощо, які ґрунтуються на ідеї граничного переходу.

Проте досвід викладання показує, що у студентів часто виникають значні труднощі з розумінням строгих означень границі функції. Формальні означення, як-от за Коші чи Гейне, вимагають високого рівня абстрактного мислення й оперування точними логічними конструкціями, що на перших етапах може бути складним навіть для підготовлених студентів. У зв'язку із цим актуальною є розробка та впровадження ефективної методики формування поняття границі функції, яка поєднувала б наочність, інтуїтивні уявлення та строгі означення, відповідала сучасним вимогам вищої освіти та сприяла розвитку математичного мислення студентів.

Аналіз досліджень і публікацій. Особливості введення поняття границі функції в точці у шкільному курсі математики розглядались у працях Т. Колесник, С. Музиченко [2; 4]. Ґрунтовний огляд основних понять тем «Границя числової послідовності» та «Границя функції» для студентів математичних спеціальностей вищих закладів освіти наведено в публікації М. Третяка і М. Босовського [6], де проаналізовано змістове наповнення теми «Границя числової послідовності» в курсі математичного аналізу та виявлено предметні особливості цієї теми. Автори вважають, що вивчення теорії границь потрібно розпочинати з вивчення границі послідовності, а потім – границі функції і неперервності, що є класичним підходом. Разом із тим пропонується першим вводити означення границі числової послідовності мовою околів, що, зрозуміло, має як свої переваги, так і певні недоліки. При цьому методичні аспекти введення поняття границі послідовності та границі функції не розглядаються.

У праці Г. Михаліна [3] детально проаналізовано методичні аспекти введення поняття границі числової послідовності та границі функції у точці та зосереджено увагу на питаннях проблемного характеру, які при цьому виникають. Для їх усунення автором запропоновано новий підхід до пропедевтики поняття границі, який ґрунтується на інтуїтивному понятті «майже рівності». За допомогою цього вдається достатньо просто доводити різноманітні властивості границь.

У публікації М. Жалдака, Г. Михаліна, С. Деканова [1] узагальнено поняття границі функції (розглянуто поняття границі функції за певної умови) та проілюстровано його використання для розв’язування деяких задач математичного аналізу, психології та теорії імовірностей. При цьому для ілюстрації відповідних співвідношень, що виникають у процесі розв’язування прикладних задач, використано авторську розробку Gran1.

Праці Г. Михаліна [3], Дж. Шидлік (J. Szydlik) [15], М. Оертмана (M. Oehrtman) [14] присвячені розгляду концептуальних засад поняття границі. У дослідженнях Д. Денбель (D. Denbel) [9], Х. Фернандес-Плази (J. Fernández-Plaza) [10] детально проаналізовано помилкові уявлення студентів про типи функцій, які мають границю в точці. Зокрема, студенти часто розглядають границю як «недосяжне», як наближення, вважають, що функція повинна бути визначена в точці, щоб мати границю в цій точці, що лише неперервна функція має границю, що границя дорівнює значенню функції в точці тощо. Зрозуміло, що ці помилкові уявлення зумовлені насамперед складністю і фундаментальністю поняття границі. Усунення зазначених проблемних питань можливе різними способами. Наприклад, шляхом використання елементів програмування для демонстрації того факту, що певне число є границею деякої числової послідовності, а тому і границею відповідної функції [8], застосування інтерактивних технологій для покрокового «покращення» означення поняття границі з метою формулювання «точного» означення границі [11], використання графічних калькуляторів [5; 12; 13], динамічних ескізів [7].

На нашу думку, використання динамічних графічних ілюстрацій під час введення поняття границі функції у точці забезпечить більш глибоке розуміння цього поняття студентами як математичних, так і нематематичних спеціальностей закладів вищої освіти.

Матеріали та методи. Під час підготовки статті були використані такі методи дослідження: аналіз науково-методичної літератури з проблеми дослідження, навчальних посібників і підручників з вищої математики та математичного аналізу; систематизація та узагальнення вітчизняного, зарубіжного та власного педагогічного досвіду; педагогічне моделювання процесу формування поняття границі функції; педагогічне спостереження та аналіз результатів навчальної діяльності студентів.

Результати. Найбільш вживаними означеннями границі функції у точці є: означення за Гейне (мовою послідовностей), означення за Коші (мовою «ε-δ»), означення мовою околів. У більшості підручників і навчальних посібників з вищої математики та математичного аналізу поняття границі функції вводять, спираючись на означення за Коші. Насправді це означення відзначається високим рівнем абстрактності і тому є складним для розуміння більшістю студентів. Ми пропонуємо методику, яка передбачає ознайомлення студентів із різними означеннями поняття границі функції в точці в послідовності: від означення, простішого для розуміння студентами, до складнішого. Спочатку пропонуємо ознайомити студентів з означенням границі функції у точці за Гейне, потім – мовою околів і на завершення – означенням за Коші.

Оскільки кожне з означень границі функції в точці є складним для розуміння для більшості студентів, то введення кожного з них здійснюватимемо конкретно-індуктивним методом із залученням відповідних графічних ілюстрацій. Для створення таких ілюстрацій ми використали програмний засіб GeoGebra. Він виявився надзвичайно зручним для створення саме динамічних графічних ілюстрації. Використання такого виду ілюстрації дає змогу студентам краще зрозуміти зміст кожного означення границі функції в точці.

Почати слід із того, що вибрати функцію, наприклад: $f(x)=\{\begin{matrix}\sqrt{x}, x\neq 4,\\ 5, x=4,\end{matrix}$ побудувати її графік і зазначити, що $D(f)=[0;+\infty)$. Позначивши на рисунку кілька значень аргументу x, які змінюються і в процесі зміни наближаються досить близько до 4, але $x\neq 4$, студенти помічають, що при цьому відповідні значення функції f як завгодно близько наближаються до числа 2 (див. рис. 1). Тут викладач повинен зазначити, що при цьому кажуть, що задана функція f в точці 4 має границею число 2, і символічно цей факт записують так: $\lim_{x\to 4} f(x)=2$. Після цього студенти самостійно або за допомогою викладача зможуть узагальнити: число A є границею функції f в точці x_0, якщо значення функції f як завгодно близько наближаються до A, коли значення аргументу x досить близькі до x_0, але $x\neq x_0$, тобто $f(x)\approx A$, коли $x\approx x_0$, але $x\neq x_0$. Тут викладач повинен наголосити, що це твердження виражає суть поняття границі функції в точці. Разом із тим воно не є строгим означенням границі функції в точці.

Далі слід наголосити студентам на необхідності «переведення» виявленої властивості функції f на строгу математичну мову й перейти до введення формального означення границі функції в точці.

Розглядаючи суть поняття границі функції в точці, ми вибирали значення x, які змінювалися й наближалися до числа 4. Ці значення можуть наближатися до числа 4 як дискретно, так і неперервно. Розглянемо випадок, коли значення x наближаються до 4 дискретно, тобто як значення x візьмемо члени певної числової послідовності, що збігається до числа 4 і всі її члени не дорівнюють 4. Наприклад, розглянемо послідовність $(x_n)=\left(4-\frac{3}{n}\right)$. Разом зі студентами встановлюємо, що ця послідовність володіє такими властивостями:

1) $x_n\in D(f)\forall n\in N$; 2) $x_n\neq 4\forall n\in N$; 3) $\lim_{n\to\infty} x_n=4$.

Позначивши кілька членів послідовності (x_n) на осі абсцис та відповідні значення функції f в цих точках на осі ординат, студенти, безумовно, помітять, що $f(x_n)\to 2$, коли $x_n\to 4$ (див. рис. 1). Гіпотезу, висунуту студентами на основі міркувань наочності, потрібно підтвердити доведенням:

$$f(x_n)=\sqrt{x_n}=\sqrt{4-\frac{3}{n}}\to\sqrt{4}=2, n\to\infty,$$

тобто послідовність $(f(x_n))$ є збіжною до числа 2, коли послідовність (x_n) збігається до числа 4.

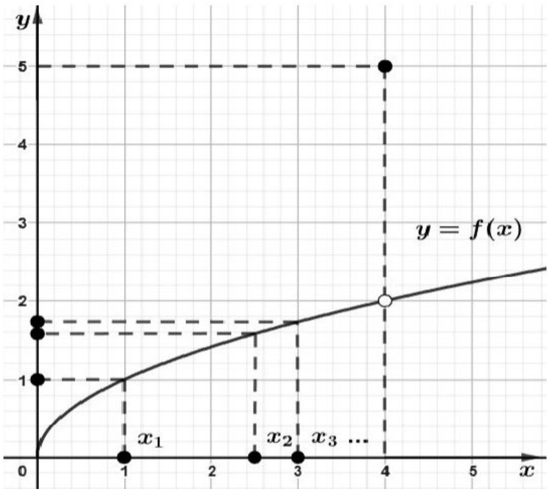

Рис. 1. Графічна ілюстрація наближення значень функції $f(x_n)$ до 2, коли $x_n\to 4$

Розглянувши послідовність $(x_n') = \left(4 + \frac{2(-1)^n}{n}\right)$, члени якої вже почергово наближаються до числа 4 справа і зліва (див. рис. 2), студенти також переконуються, що ця послідовність володіє властивостями 1) – 3) і

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n'\right) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n'} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{4 + \frac{2(-1)^n}{n}} = \sqrt{4} = 2 .$$

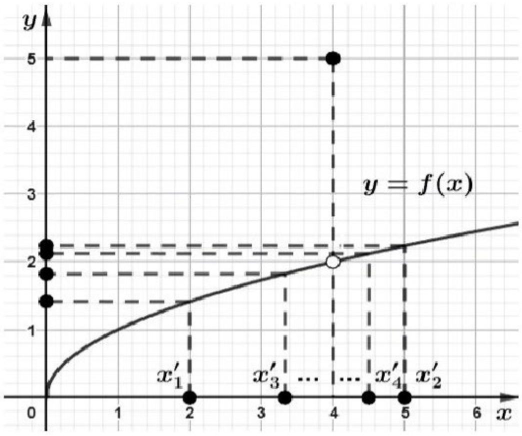

Рис. 2. Графічна ілюстрація наближення значень функції $f\left(x_n'\right)$ до 2, коли $x_n' \to 4$

Розглянуті приклади дадуть можливість студентам висунути гіпотезу про те, що $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 2$ для довільної послідовності (x_n), що володіє властивостями 1) – 3).

Справедливість цієї гіпотези слід підтвердити разом із студентами:

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{4} = 2$ (оскільки $x_n \to 4$, коли $n \to \infty$).

Таким чином, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 4$ для довільної послідовності (x_n) такої, що:

1) $x_n \in D(f) \forall n \in N$; 2) $x_n \neq 4 \forall n \in N$; 3) $\lim_{n\to\infty} x_n = 4$.

Позначаючи число 2 (границю функції f) як A, а число 4 – як x_0, на основі розглянутих прикладів студенти самостійно зможуть сформулювати **означення границі функції в точці за Гейне**. Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 за винятком, можливо, самої точки x_0. Тоді число A називають границею функції f в точці x_0 і записують $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, якщо $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$ для довільної послідовності (x_n) такої, що володіє властивостями:

1) $x_n \in D(f) \forall n \in N$; 2) $x_n \neq x_0 \forall n \in N$; 3) $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Сформулювавши строге означення поняття границі функції в точці, слід наголосити студентам, що воно характеризує поведінку функції в досить малому околі точки x_0, а не в самій точці x_0. Причому абсолютно не має значення, визначена чи ні функція f в самій точці x_0, а якщо і визначена, то яке саме значення вона набуває в цій точці. Щоб студенти це зрозуміли, нами якраз і вибрана для прикладу саме така функція f.

Зазначимо, що означення границі функції в точці за Гейне має низку беззаперечних переваг порівняно з іншими означеннями цього поняття. Насамперед це його універсальний характер, який виражається в тому, що в цьому означенні x_0 і A можуть бути можуть бути як скінченними, так невласними числами. Якщо ж формулювати означення границі функції за Коші, то потрібно окремо розглядати різні випадки для скінченних та (або) нескінченних x_0 і A та для кожного з них формулювати відповідні означення. Крім того, на основі означення границі функції за Гейне доведення основних властивостей границь функцій не викликають значних труднощів, оскільки спираються на відповідні властивості границь послідовностей (на відміну від відповідних доведень, що ґрунтуються на використанні означення границі функції за Коші).

Після введення поняття границі функції в точці слід розглянути приклади на його закріплення. Зокрема, один із прикладів може бути таким:

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to -5}\frac{x^2-25}{x+5}$, користуючись означенням границі функції в точці за Гейне.

Розв'язання. Нехай (x_n) – довільна послідовність, що володіє властивостями: 1) $x_n\neq -5 \forall n\in N$ і 2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-5$. Умову $x_n\in D(f) \forall n\in N$ опускаємо, оскільки для функції $f(x)=\frac{x^2-25}{x+5}$ область визначення $D(f)=R\setminus\{-5\}$ і члени будь-якої послідовності, що задовольняють умову $x_n\neq -5 \quad \forall n\in N$ належать області визначення цієї функції.

Знайдемо $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n^2-25}{x_n+5}$. Оскільки $x_n\to -5$ $(n\to\infty)$, то чисельник і знаменник дробу $\frac{x_n^2-25}{x_n+5}$ прямують до нуля. Тому застосовувати теорему про границю частки послідовностей в цьому разі не можна. Але оскільки $x_n\neq -5 \quad \forall n\in N$, то заданий дріб можна скоротити на x_n+5 і потім знайти границю:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2-25}{x_n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{(x_n+5)(x_n-5)}{x_n+5}=\lim_{n\to\infty}(x_n-5)=-5-5=-10.$$

Отже, за означенням границі функції в точці $\lim\limits_{x\to -5}\frac{x^2-25}{x+5}=-10$.

Далі потрібно наголосити студентам, що на практиці для знаходження границі функції в точці користуються не означенням, а суттю поняття границі, тоді розв'язання цього завдання має такий вигляд:

$$\lim_{x\to -5}\frac{x^2-25}{x+5}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -5}\frac{(x-5)(x+5)}{x+5}=\lim_{x\to -5}(x-5)=-10.$$

Для того щоб сформулювати інші означення границі функції в точці, введемо допоміжні поняття.

Означення 1 (околу точки). Околом точки x_0 називають будь-який інтервал, що містить цю точку.

Означення 2 (проколеного околу точки). Проколеним околом точки x_0 називають будь-який окіл точки x_0, з якого вилучена сама точка x_0. Проколений окіл точки x_0 позначатимемо $O(x_0)$.

Означення 3 (ε-околу точки). ε-околом точки x_0 називають інтервал $(x_0-\varepsilon; x_0+\varepsilon)$.

Повернемося знову до функції $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, x\neq 4,\\ 5, x=4.\end{cases}$

Уводячи означення границі функції в точці за Гейне, ми розглядали випадок, коли значення аргументу x наближалися до 4 дискретно, тобто як значення x було взято члени певної послідовності, що збігається до числа 4. Уявімо тепер, що значення аргументу x наближаються до 4, змінюючись неперервно, і при цьому $x\neq 4$. Студенти також помічають, що при цьому відповідні значення функції f неперервно наближаються до числа 2. І як було встановлено вище: $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=2$. Спробуємо сформулювати інше означення границі функції в точці.

На осі ординат розглянемо різні ε-околи точки $A=2$: $(2-\varepsilon; 2+\varepsilon)$, де $\varepsilon>0$.

Нехай $\varepsilon=1$. Тоді маємо окіл (1; 3). На рисунку проведемо дві горизонтальні прямі $y=1$ та $y=3$ і розглянемо горизонтальну смугу між цими прямими (див. рис. 3).

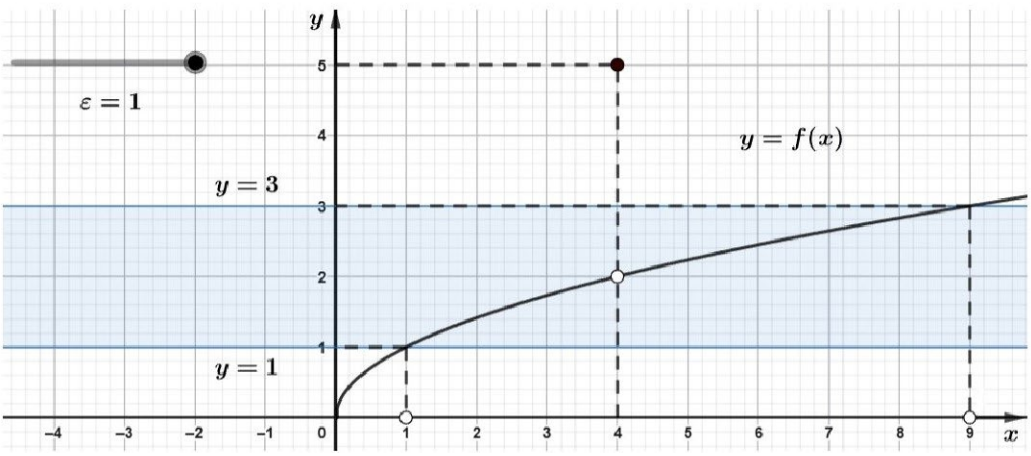

Рис. 3. Графічна ілюстрація означення границі функції в точці мовою околів для випадку $\varepsilon=1$

Те, що $y \in (1;3)$ графічно означає, що графік функції $y = f(x)$ лежить у цій смузі. Для значень функції $y = 1$ і $y = 3$ обчислимо відповідні значення аргументу: $\sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1, \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9.$

Отже, для μ-околу (1;3) точки $A = 2$ ми можемо вказати проколений окіл $O_1(4) = (1;9) \setminus \{4\}$ точки $x_0 = 4$ такий, що для всіх $x \in O_1(4)$ відповідні значення функції f потрапляють в інтервал $(1;3)$ – ε-окіл точки $A = 2$. Тут важливо наголосити студентам, що розглядаємо саме проколений окіл точки 4, оскільки $f(4) = 5$, а $5 \notin (1;3)$.

Візьмемо $\varepsilon = 0,5$. Тоді маємо окіл $(1,5;2,5)$ точки $A = 2$. При цьому ширина відповідної горизонтальної смуги зменшиться (див. рис. 4).

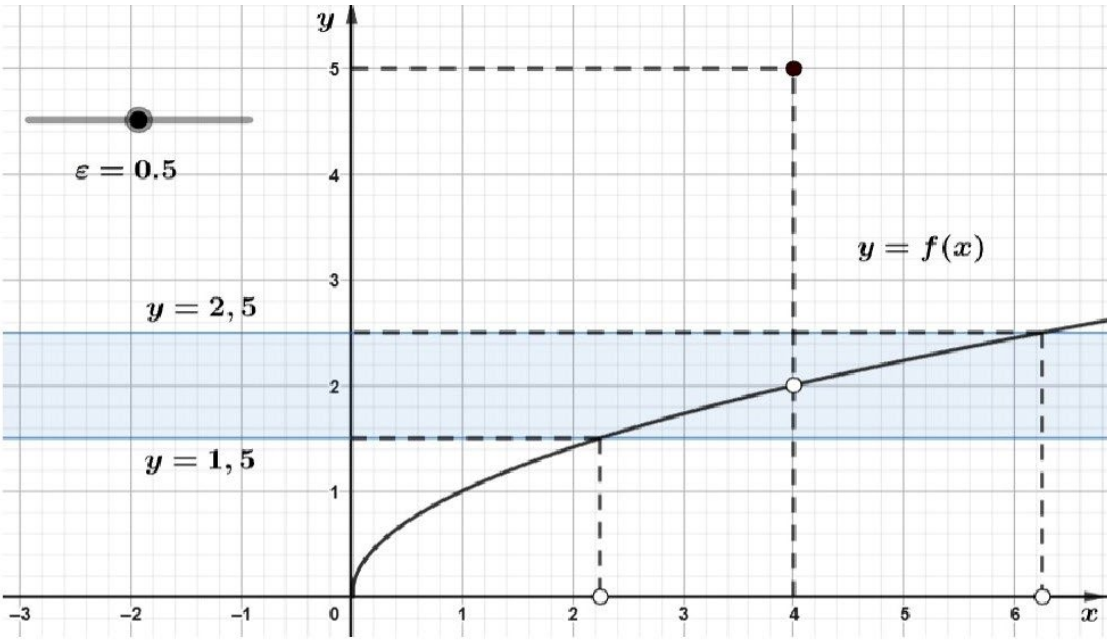

Рис. 4. Графічна ілюстрація означення границі функції в точці мовою околів для випадку $\varepsilon = 0,5$

Для цього околу ми також можемо вказати проколений окіл $O_2(4) = (2,25;6,25) \setminus \{4\}$ точки $x_0 = 4$ такий, що для всіх $x \in O_2(4)$ відповідні значення функції f потрапляють в інтервал $(1,5;2,5)$ – ε-окіл точки $A = 2.$

Спостерігаючи за динамічними ілюстраціями, на яких за допомогою відповідного бігунка вдається змінювати значення ε, студенти зможуть висунути гіпотезу: для будь-якого ε-околу точки $A = 2$ завжди можна вказати відповідний проколений окіл $O(4)$ точки $x_0 = 4$ такий, що для всіх x з цього околу відповідні значення функції f потрапляють в інтервал $(2-\varepsilon;2+\varepsilon)$ – ε-окіл точки $A = 2$. Разом зі студентами довести цю гіпотезу.

$$f(x) \in (2-\varepsilon;2+\varepsilon) \Leftrightarrow 2-\varepsilon < \sqrt{x} < 2+\varepsilon.$$

Розглянемо два випадки для ε: 1) $0 < \varepsilon \le 2$; 2) $\varepsilon > 2.$

Нехай $0 < \varepsilon \le 2$. Тоді $2-\varepsilon < \sqrt{x} < 2+\varepsilon \Leftrightarrow (2-\varepsilon)^2 < x < (2+\varepsilon)^2$.

Отже, якщо $0 < \varepsilon \le 2$, то, взявши проколений окіл $O_1(4) = \left((2-\varepsilon)^2;(2+\varepsilon)^2\right) \setminus \{4\}$ точки $x_0 = 4$, одержимо, що для всіх x з цього околу відповідні значення функції f потрапляють в інтервал $(2-\varepsilon;2+\varepsilon)$ – ε-окіл точки $A = 2$. Цей факт ілюструємо за допомогою динамічних рисунків (див. рис. 5).

Якщо $\varepsilon > 2,$ то ліва частина подвійної нерівності $2-\varepsilon < \sqrt{x} < 2+\varepsilon$ є від'ємною. Урахувавши це, отримуємо $0 \le x < (2+\varepsilon)^2$. Отже, якщо $\varepsilon > 2$, то взявши проколений окіл $O_2(4) = (0;(2+\varepsilon)^2) \setminus \{4\}$ точки $x_0 = 4$, одержимо, що для всіх x з цього околу відповідні значення функції f потрапляють в інтервал $(2-\varepsilon;2+\varepsilon)$ – ε-окіл точки $A = 2$. Цей факт також ілюструємо за допомогою динамічних рисунків (див. рис. 6).

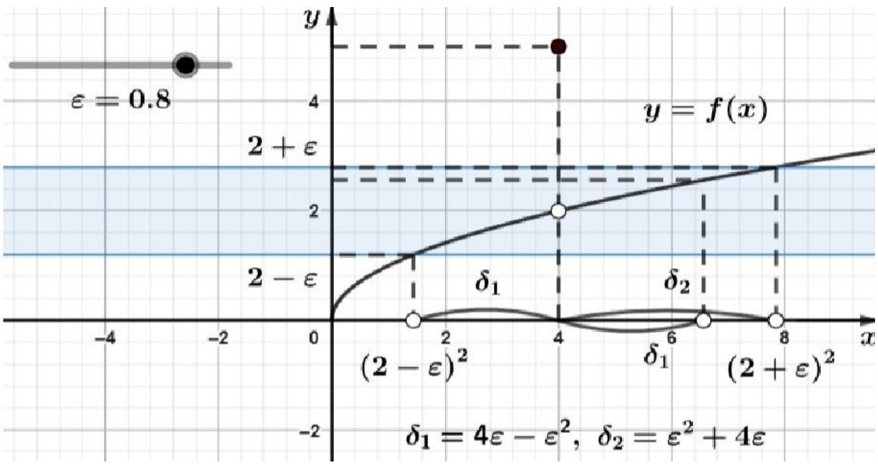

Рис. 5. Графічна ілюстрація означення границі функції в точці мовою околів та означення за Коші для довільного $\varepsilon(0;2]$

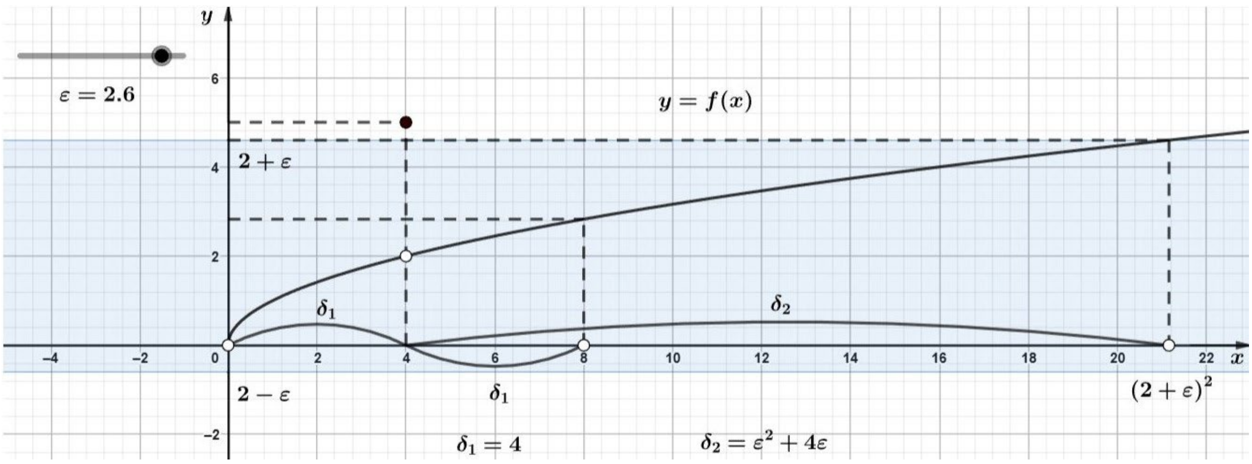

Рис. 6. Графічна ілюстрація означення границі функції в точці мовою околів та означення за Коші для довільного $\varepsilon > 2$

Таким чином, ми довели, що коли $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 2$, то для будь-якого ε-околу точки $A=2$ завжди можна вказати відповідний проколений окіл $O(4)$ точки $x_0 = 4$ такий, що для всіх x з цього околу відповідні значення функції f потрапляють в μ-окіл точки $A=2$.

Спираючись на проведені міркування, студенти зможуть самостійно сформулювати **означення границі функції в точці мовою околів**. Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0. Тоді число A називають границею функції f у точці x_0, якщо для будь-якого μ-околу точки A існує проколений окіл $O(x_0)$ точки x_0 такий, що для всіх x з цього околу відповідні значення функції f потрапляють в ε-окіл точки A.`

Слід звернути увагу студентів на те, що проколений окіл $O(x_0)$ точки x_0, про який йдеться в означенні, не завжди є симетричним відносно точки x_0. Зокрема, для наведеного вище прикладу проколені околи $O_1(4) = \left((2-\varepsilon)^2;(2+\varepsilon)^2\right)\setminus\{4\}$ і $O_2(4) = (0;(2+\varepsilon)^2)\setminus\{4\}$ не є симетричними відносно точки $x_0 = 4$ для всіх $\varepsilon > 0.$ Спробуємо для будь-якого ε-околу точки $A = 2$ знайти такий відповідний симетричний проколений окіл точки x_0, що для всіх x з цього околу відповідні значення функції f потрапляють в ε-окіл точки A.

Розглянемо випадок $0 < \varepsilon \le 2$. Уведемо позначення: $\delta_1 = 4 - (2-\varepsilon)^2 = 4\varepsilon - \varepsilon^2$ і $\delta_2 = (2+\varepsilon)^2 - 4 = \varepsilon^2 + 4\varepsilon$. На рисунку 5 значення δ_1 і δ_2 – це відстані від точки $x_0 = 4$ до кінців інтервалу $((2-\varepsilon)^2;(2+\varepsilon)^2)$. Нехай $\delta = \min\{\delta_1;\delta_2\}$. Легко переконатися, що $\delta_2 > \delta_1.$ Справді, $\delta_2 - \delta_1 = \varepsilon^2 + 4\varepsilon - \left(4\varepsilon - \varepsilon^2\right) = 2\varepsilon^2 > 0$, коли

$\varepsilon > 0$. Звідси випливає, що $\delta_2 > \delta_1$. Тому $\delta = \delta_1 = 4\varepsilon - \varepsilon^2$. Якщо тепер розглянути інтервал $(4-\delta;4+\delta)$, то він уже буде симетричним відносно точки $x_0 = 4$ і $(4-\delta;4+\delta)(4-\delta_1;4+\delta_2) = \left((2-\varepsilon)^2;(2+\varepsilon)^2\right)$ (див. рис. 7).

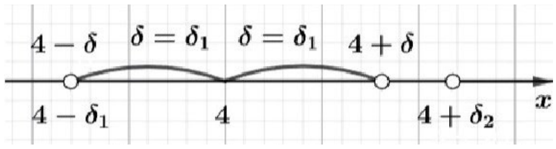

Рис. 7. Включення інтервалу $(4-\delta;4+\delta)$ в інтервал $(4-\delta_1;4+\delta_2)$

Оскільки, як показано вище, для всіх $x \in O_1(4) = \left((2-\varepsilon)^2;(2+\varepsilon)^2\right)\setminus\{4\}$ відповідні значення $f(x) \in (2-\varepsilon;2+\varepsilon)$, то і для всіх $x \in (4-\delta;4+\delta)$ також $f(x) \in (2-\varepsilon;2+\varepsilon)$. Ці викладки обов'язково ілюструємо відповідними динамічними рисунками (див. рис. 5).

Зазначені належності проміжкам можна записати так:

$$x \in (4-\delta;4+\delta) \Leftrightarrow 4-\delta < x < 4+\delta \Leftrightarrow -\delta < x-4 < \delta \Leftrightarrow |x-4| < \delta .$$

Враховуючи умову, що точка $x_0 = 4$ не повинна належати інтервалу $(4-\delta;4+\delta)$, останню нерівність можна записати так: $0 < |x-4| < \delta$.

$$f(x) \in (2-\varepsilon;2+\varepsilon) \Leftrightarrow 2-\varepsilon < f(x) < 2+\varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\varepsilon < f(x)-2 < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x)-2| < \varepsilon .$$

Отже, для будь-якого $\varepsilon \in (0;2]$ можна вказати таке $\delta = 4\varepsilon - \varepsilon^2$, що для всіх x, що задовольняють нерівності $0 < |x-4| < \delta$, виконується нерівність $|f(x)-2| < \mu$.

Розглянемо випадок $\varepsilon > 2$. Як було встановлено вище, у цьому разі можна вказати проколений окіл $O_2(4) = (0;(2+\varepsilon)^2)\setminus\{4\}$ точки $x_0 = 4$ такий, що для всіх x з цього околу відповідні значення функції f потрапляють в інтервал $(2-\varepsilon;2+\varepsilon)$. Але цей проколений окіл не є симетричним відносно точки $x_0 = 4$ для всіх $\mu > 0$. Відстані від точки 4 до лівого і правого кінців цього околу відповідно дорівнюють: $\delta_1 = 4 - 0 = 4$ і $\delta_2 = (2+\varepsilon)^2 - 4 = \varepsilon^2 + 4\varepsilon$. Якщо $\varepsilon > 2$, то $\varepsilon^2 + 4\varepsilon > 4$. Тому за δ візьмемо $\min\{\delta_1;\delta_2\} = \min\{4;\varepsilon^2+4\varepsilon\} = 4$. При цьому справедливим буде включення $(4-\delta;4+\delta) = (4-4;4+4) = (0;8)\left(0;(2+\varepsilon)^2\right)$. Оскільки для всіх $x \in O_2(4) = (0;(2+\varepsilon)^2)\setminus\{4\}$ відповідні значення $f(x) \in (2-\varepsilon;2+\varepsilon)$, то також для всіх $x \in (4-\delta;4+\delta)\setminus\{4\}$ має місце $f(x) \in (2-\varepsilon;2+\varepsilon)$. Ці викладки обов'язково ілюструємо відповідними динамічними рисунками (див. рис. 6).

Отже, для будь-якого $\varepsilon > 2$ можна вказати таке $\delta = 4$, що для всіх x, що задовольняють нерівності $0 < |x-4| < \delta$ виконується нерівність $|f(x)-2| < \varepsilon$.

Таким чином, ми встановили, що коли $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 2$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ (для $\varepsilon \in (0;2]$ $-\delta = 4\varepsilon - \varepsilon^2$, для $\varepsilon \in (2;+\infty)$ $-\delta = 4$) таке, що для всіх x, що задовольняють нерівності $0 < |x-4| < \delta$, виконується нерівність $|f(x)-2| < \varepsilon$.

Узагальнюючи наведені міркування, студенти самостійно зможуть сформулювати **означення границі функції в точці за Коші**. Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0. Тоді число A називають границею функції f у точці x_0, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta > 0$ таке, що для всіх x, що задовольняють нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Далі слід наголосити студентам, що наведене означення сформульовано для випадку, коли $A < \infty$ і $x_0 < \infty$. Це означення дещо видозмінюється, якщо хоча б одне із цих чисел є невласним. Потрібно сформулювати означення границі функції за Коші для випадків:

1) $x_0 < \infty$, $A = +\infty$; 2) $x_0 < \infty$, $A = -\infty$;

3) $x_0 = +\infty$, $A < \infty$; 4) $x_0 = -\infty$, $A < \infty$.

Для кращого розуміння цих означень для кожного випадку слід обов'язково навести відповідну графічну ілюстрацію.

Означення границі функції в точці для варіантів, коли A і x_0 одночасно є невласними числами, запропонувати студентам сформулювати самостійно.

Далі потрібно розглянути приклади на закріплення означення границі функції в точці за Коші. Зокрема, один із таких прикладів може бути таким:

Приклад. Використовуючи означення границі функції в точці за Коші, довести, що $\lim\limits_{x\to-3}(4x+5)=-7$.

Доведення. За означенням границі функції в точці за Коші потрібно довести, що для будь-якого $\varepsilon>0$ існує число $\delta>0$ таке, що з нерівності $0<|x+3|<\delta$ випливає нерівність $|(4x+5)-(-7)|<\varepsilon$.

Оскільки

$$|(4x+5)-(-7)|<\varepsilon \Leftrightarrow |4x+12|<\varepsilon \Leftrightarrow 4|x+3|<\varepsilon \Leftrightarrow |x+3|<\frac{\varepsilon}{4},$$

То, взявши $\delta=\frac{\varepsilon}{4}$, з нерівності $0<|x+3|<\delta=\frac{\varepsilon}{4}$, маємо

$$|(4x+5)-(-7)|=4|x+3|<4\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon.$$

Отже, для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдено число $\delta=\frac{\varepsilon}{4}>0$ таке, що з нерівності $0<|x+3|<\delta$ випливає нерівність $|(4x+5)-(-7)|<\varepsilon$. Згідно з означенням границі функції в точці за Коші $\lim\limits_{x\to-3}(4x+5)=-7$.

Доведення основних властивостей границь доцільно провести, спираючись на означення границі функції за Гейне, оскільки при цьому вони зводяться до безпосереднього використання відповідних властивостей границь послідовностей. Після цього слід буде зазначити студентам, що границі функцій знаходять зазвичай, спираючись не на означення, а використовуючи основні властивості границь та суть поняття границі. Особливу увагу слід приділити навчанню студентів знаходити границю функції, коли не є застосовними основні властивості границь, пов’язані з арифметичними операціями над функціями. При цьому обов’язково розглянути приклади на знаходження границь функції, що приводять до різноманітних невизначеностей.

Висновки. Запропонована методика введення поняття границі функції ґрунтується на поєднанні наочних міркувань з їх подальшим аналітичним обґрунтуванням, що дає змогу студентам самостійно дійти до формулювання різних означень границі функції. Такий підхід сприяє свідомому засвоєнню студентами поняття границі функції.

Література:

1. Жалдак М. І., Михалін Г. О., Деканов С. Я. Одне узагальнення поняття границі функції та деякі його застосування. *Науковий часопис Українського державного університету імені Михайла Драгоманова. Серія 2. Комп’ютерно-орієнтовані системи навчання*. Київ, 2007. Вип. 5 (12). С. 3–9. URL: https://enpuirb.udu.edu.ua/server/api/core/bitstreams/a2849bda-bd41-40b0-a49c-68c4da2202f8/content._

2. Колесник Т. В., Тарасенко О. В. Особливості введення поняття границі у шкільному курсі математики. *Математика в школі*. 2008. № 5. С. 34–39.

3. Михалін Г. О. Професійна підготовка вчителя математики у процесі навчання математичного аналізу. Київ : РНИЦ «ДІНІТ», 2003. 320 с.

4. Музиченко С. В. Деякі методичні особливості формування у старшокласників поняття границі. *Актуальні питання природничо-математичної освіти.* 2015. № 5–6. С. 18–24. URL: https://repository.sspu.edu.ua/bitstream/123456789/6529/1/Muzichenko%20S.%20S. pdf.

5. Томащук О., Самусенко П., Лещинський О., Іллічева Л. Методика формування поняття границі послідовності у студентів закладів вищої освіти. *Фізико-математична освіта.* 2024. Т. 39, № 2. С. 60–67. DOI: https://doi.org/ 10.31110/fmo2024.v39i2-08.

6. Третяк М. В., Босовський М. В. Деякі роздуми про вивчення границі числової послідовності. *Science and Education a New Dimension: Pedagogy and Psychology*. 2017. № 135. С. 14–17. URL: https://journals.indexcopernicus.com/ api/file/viewByFileId/557428.pdf.

7. Cory B. L., Garofalo J. Using Dynamic Sketches to Enhance Preservice Secondary Mathematics Teachers’ Understanding of Limits of Sequences. *Journal for Research in Mathematics Education.* 2011. Vol. 42, No. 1. P. 65–96. DOI: https://doi.org/ 10.5951/jresematheduc.42.1.0065.

8. Cotrill J., Dubinsky E., Nichols D., Schwingendorf K., Thomas K., Vidakovic D. Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior*. 1996. Vol. 15, No. 2. P. 167–192. DOI: https://doi.org/10.1016/S0732-3123(96)90015-2.

9. Denbel D. G. Students' misconceptions of the limit concept in a first calculus course. *Journal of Education and Practice.* 2014. Vol. 5, No. 34. P. 24–40. URL: https: //www.iiste.org/Journals/index.php/JEP/article/view/17236.

10. Fernández-Plaza J. A., Rico L., Ruiz-Hidalgo J. F. Concept of finite limit of a function at a point: Meanings and specific terms. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 2013. Vol. 44, No. 5. P. 699–710. DOI: https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.805887.

11. Flores A., Park J. Students' Guided Reinvention of Definition of Limit of a Sequence With Interactive Technology. *Contemporary Issues in Technology & Teacher Education*. 2016. Vol. 16, No. 2. P. 110–126.

12. Liang S. Teaching the Concept of Limit by Using Conceptual Conflict Strategy and Desmos Graphing Calculator. *International Journal of Research in Education and Science.* 2016. Vol. 2, No. 1. P. 35–48. URL: https://eric.ed.gov/?id= EJ1105103.

13. Mamona-Downs J. Letting the intuitive bear on the formal; a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational studies in mathematics.* 2001. Vol. 48, No. 2. P. 259–288. DOI: https://doi.org/10.1023/A: 1016004822476.

14. Oehrtman M., Swinyard C., Martin J. Problems and solutions in students' reinvention of a definition for sequence convergence. *Journal of Mathematical Behavior*. 2014. Vol. 33. P. 131–148. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmathb. 2013.11.006.

15. Szydlik J. E. Mathematical beliefs and conceptual understanding of the limit of a function. *Journal for Research in Mathematics Education*. 2000. Vol. 31, No. 3. P. 258–276. DOI: https://doi.org/10.2307/749807.

References:

1. Zhaldak, M.I., Mykhalin, H.O., Dekanov, S.Ya. (2027). Odne uzahalnennya ponyattya hranytsi funktsiyi ta deyaki yoho zastosuvannya [One generalization of the concept of the boundary of a function and some of its applications]. *Naukovyy chasopys Ukrayinskoho derzhavnoho universytetu imeni Mykhayla Drahomanova. Seriya 2. Kompyuterno-oriyentovani systemy navchannya – Scientific Journal of the Mykhailo Dragomanov Ukrainian State University. Series 2. Computer-Oriented Learning Systems*, *5* (12), 3–9. Retrieved from URL: https://enpuirb.udu.edu.ua/server/api/core/bitstreams/a2849bda-bd41-40b0-a49c-68c4da2202f8/content [in Ukrainian].

2. Kolesnyk, T.V., Tarasenko, O.V. (2008). Osoblyvosti vvedennya ponyattya hranytsi u shkilnomu kursi matematyky [Peculiarities of introducing the concept of limit in the school mathematics course]. *Matematyka v shkoli – Mathematics at school*, *5*, 34–39 [in Ukrainian].

3. Mykhalin, H.O. (2003). *Profesiyna pidhotovka vchytelya matematyky u protsesi navchannya matematychnoho analizu [Professional training of mathematics teachers in the process of teaching mathematical analysis]*. Kyiv: DINIT [in Ukrainian].

4. Muzychenko, S.V. (2015). Deyaki metodychni osoblyvosti formuvannya u starshoklasnykiv ponyattya hranytsi [Some methodological features of the formation of the concept of a limit in high school students]. *Aktualni pytannya pryrodnycho-matematychnoyi osvity – Current issues of science and mathematics education*, *5–6*, 18–24. Retrieved from URL: https://repository.sspu.edu.ua/bitstream/123456789/6529/1/Muzichenko%20S.%20S.pdf [in Ukrainian].

5. Tomashchuk, O., Samusenko, P., Leshchynskyy, O., Illicheva, L. (2024). Metodyka formuvannya ponyattya hranytsi poslidovnosti u studentiv zakladiv vyshchoyi osvity [Methodology for the formation of the concept of the limit of a sequence among students of higher education institutions]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and mathematical education*, *39* (2), 60–67. DOI: https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i2-08 [in Ukrainian].

6. Tretyak, M.V., Bosovskyy, M.V. (2017). Deyaki rozdumy pro vyvchennya hranytsi chyslovoyi poslidovnosti [Some reflections on the study of the limit of a numerical sequence]. *Science and Education a New Dimension: Pedagogy and Psychology*, *135*, 141–7. Retrieved from URL: https://journals.indexcopernicus.com/ api/file/viewByFileId/557428.pdf [in Ukrainian].

7. Cory, B.L., Garofalo, J. (2011). Using Dynamic Sketches to Enhance Preservice Secondary Mathematics Teachers' Understanding of Limits of Sequences. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42* (1), 65–96. DOI: https://doi.org/10.5951/jresematheduc.42.1.0065 [in English].

8. Cotrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior*, *15* (2), 167–192. DOI: https://doi.org/10.1016/S0732-3123(96)90015-2 [in English].

9. Denbel, D.G. (2014). Students' misconceptions of the limit concept in a first calculus course. *Journal of Education and Practice*, *5* (34), 24-40. Retrieved from URL: https://www.iiste.org/Journals/index.php/JEP/article/view/17236 [in English].

10. Fernández-Plaza, J.A., Rico, L., Ruiz-Hidalgo, J.F. (2013). Concept of finite limit of a function at a point: Meanings and specific terms. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *44* (5), 699–710. DOI: https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.805887. [in English].

11. Flores, A., Park, J. (2016). Students' Guided Reinvention of Definition of Limit of a Sequence With Interactive Technology. *Contemporary Issues in Technology &Teacher Education*, *16* (2), 110–126. Retrieved from URL: https://www.learntechlib.org/primary/p/151562/ [in English].

12. Liang, S. (2016). Teaching the Concept of Limit by Using Conceptual Conflict Strategy and Desmos Graphing Calculator. *International Journal of Research in Education and Science*, *2* (1), 35–48. Retrieved from URL: https://eric.ed.gov/?id= EJ1105103 [in English].

13. Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal; a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational studies in mathematics*, *48* (2), 259–288. DOI: https://doi.org/10.1023/A: 1016004822476 [in English].

14. Oehrtman, M., Swinyard, C., Martin, J. (2014). Problems and solutions in students' reinvention of a definition for sequence convergence. *Journal of Mathematical Behavior*, *33*, 131–148. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013. 11.006 [in English].

15. Szydlik, J.E. (2000). Mathematical beliefs and conceptual understanding of the limit of a function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31* (3), 258–276. DOI: https://doi.org/10.2307/749807 [in English].

Дата першого надходження статті до видання: 19.01.2026
Дата прийняття статті до друку після рецензування: 16.02.2026
Дата публікації (оприлюднення) статті: 21.04.2026